



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Dissertação de Mestrado

**Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+:
Análise Comparativa do Algoritmo Recursivo de Panjer
e o Método de Aproximações Ponto de Sela**

por

André Nunes Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Antonio Eduardo Gomes

Setembro de 2010

André Nunes Maranhão

**Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+:
Análise Comparativa do Algoritmo Recursivo de Panjer
e o Método de Aproximações Ponto de Sela**

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Universidade de Brasília
Brasília, Setembro de 2010

TERMO DE APROVAÇÃO

André Nunes Maranhão

DISTRIBUIÇÃO DE PERDA AGREGADA NO MODELO CREDITRISK+:
ANÁLISE COMPARATIVA DO ALGORITMO RECURSIVO DE PANJER
E O MÉTODO DE APROXIMAÇÕES PONTO DE SELA

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Data da defesa: 27 de setembro de 2010

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Eduardo Gomes
Departamento de Estatística, UnB

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Bernardo Borba de Andrade
Departamento de Economia, UnB

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva
Departamento de Economia, UFSC

Brasília, Setembro de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

MARANHÃO, ANDRÉ NUNES

Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+: Análise Comparativa do Algoritmo Recursivo de Panjer e o Método de Aproximações Ponto de Sela. Brasília 2010.

xii,145p.,210x297mm(UnB - IE, Mestre em Estatística, 2010).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Departamento de Estatística - Instituto de Ciências Exatas.

1. Risco de Crédito
2. Distribuição de Perda Agregada
3. Recursividade de Panjer
4. Aproximações Ponto de Sela

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MARANHÃO, A. N. :Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+: Análise Comparativa do Algoritmo Recursivo de Panjer e o Método de Aproximações Ponto de Sela. Dissertação de Mestrado. Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília. UNB. (2010)

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR/GRAU/ANO: André Nunes Maranhão/Mestre/2010.

TÍTULO:Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+: Análise Comparativa do Algoritmo Recursivo de Panjer e o Método de Aproximações Ponto de Sela.

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

André Nunes Maranhão

Address: QNA 48 casa 11 - Taguatinga Brasília, DF - Brasil - CEP:7210-480

A Deus, a minha família.

Aquele que mais amo, Nicolau Gonçalo Maranhão, meu pai.

Aos amigos, irmãos, colegas e amores.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus. Agradeço a toda minha família pela compreensão em muitos momentos ausentes.
- A Universidade de Brasília e seu Departamento de Estatística pela oportunidade de estudo.
- Ao meu Orientador Professor Antonio Eduardo Gomes por toda sua ajuda, dedicação e paciência.
- Aos meus colegas do Banco do Brasil por todo apoio durante esse programa de mestrado.
- Aos Professores e colegas do Programa de Mestrado em Matemática, por grandes momentos de aprendizado.
- Ao Professor Michael Gordy por todas as sugestões e avaliações desse trabalho, tão atenciosamente e gentilmente me oferecido.
- A todos que direta ou indiretamente participaram comigo desse período de estudos.

Sumário

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
Resumo	8
Abstract	10
Introdução	12
1 Conceitos, Modelos e Definições de Risco de Crédito	15
1.1 Introdução	15
1.2 Componentes de Risco de Crédito: Conceito de <i>Default</i> , Probabilidade de <i>Default</i> , Perda Dada Inadimplência, Exposição Líquida e Perda Esperada	17
1.2.1 Modelos de Regressão Logística e Modelos de Credit Scores	19
1.3 Valor em Risco e Capital Econômico	23
1.4 Basiléia II, Capital Econômico Regulatório e o Caso Brasileiro	25
1.5 Visão Geral dos Modelos de Capital Econômico e Adequação ao Contexto Brasileiro	27
2 O Modelo CreditRisk+	32
2.1 Introdução	32
2.2 Componentes de Risco de Crédito no Modelo CreditRisk+	33
2.3 Momentos e Funções Geradoras	36
2.4 Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+	39
2.5 Distribuições Compostas e Recursividade de Panjer	44

2.5.1	Distribuições Compostas	45
2.5.2	Recursividade de Panjer	46
2.6	Recursividade de Panjer no Modelo CreditRisk+	47
3	Fragilidades e Alternativas na Implementação do Modelo CreditRisk+	55
3.1	Introdução	55
3.2	Aproximação Logarítmica da Distribuição de Poisson	56
3.3	Número de Faixas de Exposição e Impactos na Distribuição de Perda Agregada	58
3.4	Carteiras de Crédito com Exposições Hetero-gêneas	59
3.5	Determinação da Volatilidade da Taxa de <i>Default</i>	63
3.6	Instabilidade Numérica do Algoritmo Recursivo de Panjer	66
4	Aproximações Ponto de Sela: Cálculo do V@R Utilizando os Primeiros Momentos no Modelo CreditRisk+	68
4.1	Introdução	68
4.2	Introdução ao Método Aproximações Ponto de Sela	69
4.3	Aproximações Ponto de Sela Aplicada ao Modelo CreditRisk+	72
4.4	Comportamento da Cauda da Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+ e o Método de Verificação de Resultados	75
5	Exemplo Numérico do Modelo CreditRisk+: Recursividade de Panjer e Aproximações Ponto de Sela	78
5.1	Introdução	78
5.2	Estimação do V@R Via Recursividade de Panjer	79
5.3	Estimação do V@R Via Aproximações Ponto de Sela	84
5.4	Estimação do CER	86
5.5	Aplicação do Método de Verificação e Comparação de Resultados	88
6	Análise de Resultados	90
6.1	Introdução	90
6.2	Análise dos Componentes de Entrada do Modelo CreditRisk+	91
6.2.1	Conceito de <i>Default</i>	91

6.2.2	Perda Dada Inadimplência (PDI)	92
6.2.3	Probabilidade de <i>Default</i>	93
6.2.4	Exposições da Carteira: Bruta e Líquida	96
6.3	Análise do Efeito do Número de Faixas, Apro-ximação Logarítmica e Alternativas	98
6.4	Análise de Heterogeneidade da Carteira e Alternativas	105
6.5	Simulação da Volatilidade da Taxa de <i>Default</i> e Exigência de Capital Regulatório	109
6.6	Resultados Comparativos da Estimaco de V@R: Recursividade de Panjer e Aproximao Ponto de Sela	113
	Concluso	117
	Referncias Bibliogrficas	119
	Apndice	125
A	Binomial Negativa Como Composta de Poisson-Gama	125
B	Exemplo da Recursividade de Panjer Para a Distribuico Binomial Negativa	126
C	Recursividade de Panjer no Modelo CreditRisk+ Para Um Setor e Probabilidade de <i>Default</i> Determinística	127
D	Estimaco Via Mxima Verossimilhana dos Pa-rmetros de Uma Distribuico Gama	133
E	Valores Estimados Via Aproximao Ponto de Sela	136
F	Apresentaco em Cdigo SAS dos Valores Estimados	138

Lista de Figuras

1.1	Conceito de Capital Econômico e V@R de Crédito	23
1.2	Tabela Comparativa dos Principais Modelos de V@R de Crédito . . .	31
3.1	Aproximação Logarítmica da Distribuição de Poisson	57
3.2	Comparativo de Carteiras com Diferentes Exposições	60
3.3	Exemplo de Possibilidades para Tratamento de Carteiras Heterogêneas	62
5.1	Comparativo do Cálculo Computacional e Manual do Exemplo Didático	85
6.1	PDI por Região e Tipo de Pessoa	93
6.2	Faixas de <i>Rating</i>	93
6.3	Distribuição de Clientes por <i>Rating</i>	94
6.4	Distribuição de Clientes por <i>Rating</i>	94
6.5	Distribuição de Clientes por Metodologia	95
6.6	Gráfico da Distribuição de Clientes por Metodologia	95
6.7	Distribuição de EXL e EB por Tipo de Cliente	96
6.8	Análise Descritiva da EXL e EB por Tipo de Pessoa	96
6.9	Valores de Percentil de EB para PF e PJ	97
6.10	Distribuição de EXL e EB por <i>Rating</i>	97
6.11	Distribuição de EXL e EB por Metodologia	97
6.12	Algumas Medidas de EXL	98
6.13	V@R Modelo Padrão	99
6.14	CE com 100 e 25 faixas de Exposição	100
6.15	CE com 300 e 100 faixas de Exposição	100
6.16	Comparativo de CE com 25,100 e 300 faixas de Exposição	101
6.17	Comparativo de V@R com 25, 100 e 300 Faixas de Exposição	101

6.18	CE com PD menores que 0,09	102
6.19	EXL com PD menores que 0,09 por Metodologia	103
6.20	Comparativo CE com PD menores que 0,09	103
6.21	Comparativo V@R com PD menores que 0,09	104
6.22	Análise de V@R para Número de Faixas Correspondentes a Medidas Exploratórias	105
6.23	Análise da Quantidade de Clientes por Faixa de Exposição para Dife- rentes Valores de <i>Range</i>	106
6.24	Comparativo de V@R por Tipo de Pessoa	107
6.25	Valores Comparativos de V@R por Tipo de Pessoa	107
6.26	Valores de Volatilidade para Simulação de CE	109
6.27	Valores Estimados dos Parâmetros da Distribuição Gama via EMV .	110
6.28	Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades 0,5; 0,2; 0,3; 0,4	111
6.29	Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades 0,5; 0,6; 0,8; 0,9	111
6.30	Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades: 0,5; 1 e 1,1 . .	112
6.31	Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades: 0,5; 1,2 e 1,68	112
6.32	Valores de CE para Diferentes Volatilidades	113
6.33	Comparativo de Performance na Estimação de CE via Aproximações Ponto de Sela	113
6.34	Tabela de Amostra de Valores Estimados pelo Método Aproximações Ponto de Sela	114
6.35	Comportamento de Cauda da Distribuição de Perda Agregada - Com- parativo de Métodos	115
6.36	Erro Relativo Absoluto para Modelos Estimados via Recursividade de Panjer	116
37	Exemplo de Distribuição Gama(3,2)	134
38	Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Um	137
39	Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Dois	138
40	Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Três	138

41	Opções de Estimação de Densidades Parametricas - PROC CAPABILITY - SAS	139
42	Opções de Estimação da Distribuição Gama - PROC CAPABILITY - SAS	140
43	CE - Códigos em SAS - Primeira Parte	140
44	CE - Códigos em SAS - Segunda Parte	141
45	CE - Códigos em SAS - Terceira Parte	141
46	CE - Códigos em SAS - Quarta Parte	142
47	CE - Códigos em SAS - Quinta Parte	142
48	CER - Códigos em SAS - Primeira Parte	143
49	CER - Códigos em SAS - Segunda Parte	143
50	CER - Códigos em SAS - Terceira Parte	144
51	Aproximações Ponto de Sela - Códigos em SAS - Primeira Parte . . .	144
52	Aproximações Ponto de Sela - Códigos em SAS - Segunda Parte . . .	145
53	Controle de Tempo de Processamento - Códigos em SAS - Primeira Parte	145
54	Controle de Tempo de Processamento - Códigos em SAS - Segunda Parte	145

Lista de Tabelas

5.1	Exemplo Numérico - Recursividade de Panjer e Aproximações Ponto de Sela	79
5.2	Exemplo Numérico CER	87
5.3	Exemplo Numérico Comparativo de V@R Estimado por Diferentes Métodos e CER	89
6.1	Produtos de Crédito e Data de <i>Default</i> por Tipo de Cliente.	92

Resumo

O modelo CreditRisk+ vem se difundindo rapidamente na indústria bancária em especial nos mercados em que os demais modelos de estimação da distribuição de perda agregada possuem restrições de implementação. Essa metodologia apresenta resultados satisfatórios e suas características parcimoniosas coincidem com os componentes avaliados pelo Acordo de Basileia. Sua metodologia original estima a distribuição de perda agregada e todas as demais medidas de risco de crédito resultantes dessa distribuição por meio de um algoritmo recursivo (conhecido como recursividade de Panjer) evitando dessa forma o uso das simulações de Monte Carlo.

Neste estudo, o modelo CreditRisk+ será detalhadamente apresentado, sendo evidenciadas suas principais fragilidades de implementação sob condições reais de uma carteira de crédito. Utilizando uma base de dados reais de uma carteira com dezesseis milhões de clientes, são demonstrados os efeitos de tais fragilidades e testadas algumas alternativas para contorná-las. Contudo, a mais adequada alternativa para tratamento dessas fragilidades recorre ao uso da metodologia conhecida como aproximações ponto de sela, que utiliza a função geradora de cumulantes para estimar de maneira computacionalmente eficiente e acurada as medidas de risco de crédito da carteira.

Como principais resultados temos que o cálculo das medidas de risco de crédito da carteira, por meio da metodologia de aproximações ponto de sela, em termos de *performance* de tempo de processamento é extremamente mais rápido do que as estimativas através do algoritmo recursivo de Panjer. Em termos de acurácia, a metodologia de aproximações ponto de sela não requer qualquer tipo de discretização dos valores monetários dos empréstimos dos clientes, fonte de várias fragilidades e instabilidade numérica do modelo original. A verificação dos resultados do modelo básico por meio

do comportamento da cauda da distribuição de perda agregada comprova o acúmulo de erro numérico do algoritmo de recursividade de Panjer.

Palavras Chave: *Risco de Crédito, Acordo de Basileia, Distribuição de Perda Agregada, Distribuição Binomial Negativa Composta, Value-at-Risk, Capital Econômico, Funções Geradoras, Recursividade de Panjer, CreditRisk+, Volatilidade da Taxa de Inadimplência, Aproximações Ponto de Sela.*

Abstract

The CreditRisk+ model has been increasingly used in the banking industry. This methodology has yielded satisfactory results mainly in markets where implementing other aggregate-loss distribution estimation models is difficult. Its parsimonious features coincide with the components assessed by the Basel Agreement. Its original methodology estimates the aggregate-loss distribution and all other credit-risk measures resulting from this distribution through a recursive algorithm (known as Panjer recursion), thereby avoiding the use of Monte Carlo simulations.

In this paper, the CreditRisk+ model will be described in detail and its main implementation weaknesses under real conditions of a credit portfolio will be highlighted. Using a real database of a sixteen-million client credit portfolio, the effects of such weaknesses are demonstrated and some alternatives to deal with them are tested. However, the most appropriate way to address these weaknesses requires using the so-called saddlepoint approximation methodology, which uses the cumulant-generating function to assess the portfolio credit-risk measures in a computationally effective and accurate fashion.

The main results were that, in terms of processing-time performance, calculating the portfolio credit-risk measures through the saddlepoint approximation methodology is extremely faster than estimating it through the Panjer recursive algorithm. With regard to accuracy, the saddlepoint approximation methodology does not require any discretization of monetary amounts of client loans, which is a source of several weaknesses and numerical instability in the original model. Furthermore, checking the basic model results through the behavior of the aggregate-loss distribution tail confirms the numerical error accumulation of the Panjer recursive algorithm.

Key Words: *Credit Risk, Basel Agreement, Aggregate-loss Distribution, Com-*

pound Negative Binomial Distribution, Value at Risk, Economic Capital, Generating Functions, Panjer Recursion, CreditRisk+, Default-Rate Volatility, Saddlepoint Approximations.

Introdução

A recente crise financeira internacional, conhecida como a crise do *subprime*, foi precedida de uma crise de crédito com impacto sobre a solvência dos bancos diretamente envolvidos. Independentemente das possíveis origens dessa crise (impactos das inovações tecnológicas no mercado financeiro ou assimetria de informações no mercado de crédito), por envolver diretamente a solvência dos bancos podemos considerá-la também como uma crise de capital econômico.

O conceito de Capital Econômico (CE) está associado aos ativos ou ao capital de um banco que serão utilizados em situações nas quais as perdas oriundas do crédito estejam acima de uma perda média esperada e precificada. Tais perdas estão associadas à ocorrência de eventos simultâneos de inadimplência (*default*), quer dizer, a uma probabilidade conjunta de *default*. A distribuição dessa probabilidade conjunta de *default* (ou seja, a distribuição de perda agregada) descreve o risco que um banco pode correr dentro de um período de tempo determinado, como por exemplo um ano.

Muito embora a teoria de risco oriunda da teoria da ruína e subsequentemente da teoria atuarial de risco já apresentasse resultados datados desde o início do século passado, sua aplicação ao risco de crédito é relativamente recente. Os principais modelos que estimam a distribuição de perda agregada para aplicações em risco de crédito foram desenvolvidos somente nos anos 90. Quatro modelos em particular se destacaram nesse objetivo de estimação: Creditmetrics, Credit Portfolio View, KMV e o modelo CreditRisk+.

Os três primeiros modelos são caracterizados por serem modelos de marcação a mercado, ou seja, estão associados a matrizes de migração de *rating*, ao valor de mercado de uma carteira de empréstimos, a definições de evento de *default* em tempo contínuo, entre outras características. Dessa forma, a aplicação desses modelos à re-

alidade de países nos quais o mercado financeiro ainda não está totalmente amadurecido é comprometida. O último modelo, CreditRisk+ (CR+), por outro lado, tem suas bases conceituais estabelecidas no componente principal em qualquer análise de crédito: o evento de *default* de qualquer devedor em particular, por isso, o CR+ é conhecido como modelo de modalidade de *default*.

Os valores de entrada no modelo CR+ coincidem com os componentes internos exigidos pelo Acordo de Basiléia e pelos agentes reguladores de cada país participante, respectivamente. Portanto, esse modelo se difundiu rapidamente na indústria bancária. Em particular no Brasil, onde a aplicação dos demais modelos é prejudicada pelo nível de desenvolvimento do mercado financeiro, no tocante ao mercado de crédito, o modelo CR+ apresenta grande difusão.

Nesse modelo, o conceito de perda agregada parte considerando a probabilidade individual de *default*, ou seja, a perda de um devedor A qualquer, como sendo representada por uma variável aleatória $X_A = \mathbb{I}_A v_A$, onde v_A é a exposição desse devedor (o conceito de exposição será apresentado em maior detalhe no primeiro capítulo, contudo preliminarmente pode-se dizer que refere-se ao valor do empréstimo realizado pelo devedor A), e

$$\mathbb{I}_A = \begin{cases} 1, & \text{se A entra em } \textit{default} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, a distribuição de probabilidade de X_n é dada por $P(X_A = v_A) = p_A$ e por $P(X_A = 0) = 1 - p_A$. A perda agregada de uma carteira, considerando independência dos devedores, será representada por uma variável aleatória X :

$$X = \sum_{A=1}^N X_A = \sum_{A=1}^N \mathbb{I}_A v_A.$$

Esta perda agregada é estimada de maneira computacionalmente eficiente no modelo CR+ utilizando a função geratriz de probabilidade e a partir do algoritmo recursivo de Panjer [53]. Esse algoritmo reduz-se a uma fórmula analítica tratável que, sob certas condições, estima a distribuição de perda agregada de maneira acurada e eficiente. Contudo, esse modelo apresenta fragilidades quando aplicado a condições extremas como o cálculo de perda agregada de um grande número de clientes. Entre

as principais fragilidades estão a instabilidade numérica do algoritmo de Panjer e o processo de discretização das exposições.

Alternativamente ao algoritmo de Panjer, apresentamos neste estudo um método ainda mais eficiente em termos computacionais sem apresentar as fragilidades do modelo original. Essa alternativa é conhecida na literatura estatística como método de aproximações ponto de sela, que utiliza a função geratriz de cumulantes e os primeiros momentos para estimar os valores que mais importam em uma distribuição de perda agregada de risco de crédito: os valores extremos de percentis, como por exemplo, o percentil 99,5. A escolha de percentis extremos está associada aos conceitos de *Value-at-Risk*, ou simplesmente $V@R$.

Portanto, apresentamos no capítulo primeiro os conceitos e definições básicos para qualquer estudo na área de risco de crédito. No segundo capítulo, descrevemos detalhadamente o modelo CreditRisk+ e alguns conceitos intensamente utilizados em seu desenvolvimento. No terceiro capítulo, apresentamos as principais fragilidades e suas alternativas no modelo CR+. A alternativa que melhor responde as questões apontadas nesse capítulo encontra-se no método aproximações ponto de sela apresentado no capítulo quatro. No quinto capítulo apresentamos um exemplo numérico hipotético com vistas a elucidar os cálculos de estimação de toda discussão apresentada nos capítulos precedentes. Finalizamos o estudo apresentando vários ensaios que evidenciam as fragilidades, testamos algumas alternativas e apresentamos um comparativo dos métodos de recursividade de Panjer e de aproximações ponto de sela a partir de uma base de dados real com 16 milhões de clientes.

Capítulo 1

Conceitos, Modelos e Definições de Risco de Crédito

1.1 Introdução

A teoria de risco de crédito teve, na origem de seu desenvolvimento, os estudos da área da ciência atuarial que estuda modelos relacionados a seguros de não-vida, ou seja, seguros de automóveis, viagens e residências, tendo em comum o interesse na descrição e estimação do risco, visto como uma probabilidade de perda de natureza econômica. De acordo com McNeil *et al.* [45], o risco de crédito está associado ao risco de mudança do valor de uma carteira devido a mudanças inesperadas na qualidade de crédito do emissor ou da contraparte. Segundo o Comitê de Supervisão Bancária de Basileia (Basel Committee on Banking Supervision - BCBS)[11], o risco de crédito pode ser definido de maneira simples como a possibilidade de um tomador ou contraparte de um banco não honrar suas obrigações nos termos pactuados.

Uma das informações mais significativas para a seguradora é conhecer a probabilidade de ruína: a probabilidade de que em algum instante de tempo finito a reserva de capital torne-se negativa. Da mesma forma, uma das informações mais relevantes para um banco é conhecer seu valor monetário em risco que está associado às suas operações de empréstimo: a probabilidade de uma máxima perda ocorrer em algum instante de tempo finito.

Essa probabilidade possui uma importância tão acentuada que extrapolou as preocupações individuais de cada banco e tornou-se tema de discussões relativas ao risco sistêmico, tratado por órgãos reguladores do mercado financeiro em todo o mundo. Nesse sentido, o advento do Acordo de Basileia surge como a referência tanto para equalizar diferenças internacionais dessa probabilidade, ou seja, diferenças de capital econômico, como em BCBS [10], quanto para estabelecimento de novos padrões para o tratamento de risco em instituições financeiras, seu monitoramento e evidênciação, BCBS [14].

O capital econômico, dessa forma, se traduz em uma probabilidade conjunta de inadimplência considerando para tanto uma carteira de empréstimos. Esse capital quando estimado por meio de fórmulas estipuladas pelos agentes reguladores como o BCBS [10,14], sendo posteriormente exigido pelos bancos centrais aos bancos, é conhecido como capital mínimo exigido (CME) ou capital econômico regulatório (CER).

Seja o CER ou Capital Econômico (CE) estimado internamente por modelos proprietários dos bancos, sua finalidade é impor limites à alavancagem dos bancos e funciona como a reserva de capital para absorver perdas oriundas das diferentes modalidades de risco, entre elas, o risco de crédito. Nesse capítulo, introduziremos conceitos desse risco que serão necessários para o desenvolvimento dos modelos de perda agregada.

Apresentaremos na seção 1.2 os componentes de cálculo do CE. Cada componente tem sua própria linha de pesquisa na literatura acadêmica e sua própria discussão no ambiente regulatório. Contudo, apresentaremos apenas no nível adequado para a sequência de desenvolvimento do modelo de estimação de CE. Será recorrente nesta dissertação o uso de conceitos relacionados aos modelos de *credit score*, em particular da metodologia que utiliza os modelos de regressão logística. Desta forma, na seção 1.2.1 será apresentada, também em nível adequado, os conceitos dessa metodologia. Na seção 1.3 apresentaremos os conceitos de valor em risco ($V@R$) e de capital econômico, principais valores a serem estimados no presente estudo. Na seção subsequente 1.4 apresentaremos um breve histórico do Acordo de Basileia II, o conceito de capital econômico regulatório e sua versão no caso brasileiro. Por fim, apresentaremos na seção 1.5 uma visão geral dos demais modelos de estimação de capital econômico e suas fragilidades para aplicação no contexto brasileiro.

1.2 Componentes de Risco de Crédito: Conceito de *Default*, Probabilidade de *Default*, Perda Dada Inadimplência, Exposição Líquida e Perda Esperada

O primeiro passo para a definição e estimação dos componentes de risco de crédito e mesmo do CE, é a definição do conceito de *default*. Segundo o Novo Acordo, BCBS [14], a inadimplência é definida no parágrafo 452 como: “Considera-se que houve inadimplência quando, com relação a um tomador em particular, um dos ou ambos os eventos a seguir ocorre(m):

- O banco considera improvável que o tomador irá honrar integralmente suas obrigações junto ao conglomerado bancário, sem que o banco tenha que recorrer a ações como a execuções de títulos (em caso de existir);

- O tomador está em atraso há mais de 90 dias em qualquer obrigação de crédito junto ao conglomerado bancário.”

Contudo, o conceito de *default* pode ser definido também por uma modelagem estatística, já que em algumas modalidades de crédito atrasos de 90 dias não representam de fato a ocorrência de inandimplência, pois a maioria dos clientes, apesar de um longo período de atraso, arcam com pagamento de juros e multas de atraso sem deixar de cumprir os termos de sua obrigação, como é típico de empréstimos rurais e agropecuários. O mesmo prazo de 90 dias de atraso para outras modalidades de crédito perde sentido, pois atrasos de até 15 dias são suficientes para caracterizar o *default* como é típico dos empréstimos para segmentos pessoa física (PF) de baixa renda.

Dessa forma, é comum bancos utilizarem metodologias proprietárias para a definição do *default*. Estima-se para cada modalidade de crédito sua própria data de *default*, em que atrasos acima dessa data estimada já podem ser consideradas inadimplência.

Uma vez definido o conceito que demarca clientes inadimplentes, é possível segmentar o risco de crédito em dois fundamentais componentes: a probabilidade de

default (PD) e a perda dada a inadimplência $PDI(Loss\ Given\ Default, LGD)$.

A PD mensura a probabilidade, em determinado horizonte de tempo (em geral um ano), de um cliente entrar em inadimplência em uma operação de crédito ou em um conjunto de operações de crédito. Existem duas abordagens mais utilizadas para estimação dessa probabilidade, segundo Bluhm *et al.*[18]:

- Calibração da probabilidade de *default* a partir de *ratings*. *Ratings* basicamente são classificações que descrevem a capacidade de pagamento de um devedor, podendo ser resultado de uma modelagem proprietária de um banco, ou adquiridos junto a agências externas de *rating*. Como ressalta Bluhm *et al.*[18], *ratings* são gerados tanto de maneira quantitativa como qualitativa. Nessa metodologia, dada a classificação de *ratings* ano a ano, acompanha-se a frequência histórica de *default* por *rating*, obtém-se a partir desse histórico a média e desvio-padrão de *default* para cada *rating*, estima-se então via modelos regressivos (não lineares em geral) uma relação entre os *ratings* e suas dispersões. Todos os clientes classificados com determinado *rating*, dado seu perfil, possuem sua PD calibrada por esse método.

- Estimação da probabilidade de *default* via modelos *credit score*. Nesse método estima-se a PD a partir de uma base histórica de informações de inadimplência, por meio da qual várias metodologias estatísticas e matemáticas são implementadas, sendo as mais comuns segundo Hand e Henley [33], análise de discriminante, regressão linear múltipla, regressão logística, programação linear e não-linear, redes neurais e método de árvores de decisão. Segundo Hand e Henley [33], não há, em geral, nenhum método absolutamente melhor. O que é o melhor dependerá dos detalhes do problema: A estrutura de dados, das características usadas e do objetivo da classificação. A exatidão da classificação, medida de qualquer modo, é somente um aspecto do desempenho. Outros aspectos incluem a velocidade da classificação, a velocidade com que um *score* ou uma probabilidade pode ser revisada, a facilidade da compreensão do método da classificação, entre outros.

Após a inadimplência, o banco recupera uma parte de sua dívida através da execução de garantias, dos processos de renegociação, entre outras formas. A parcela não recuperada da dívida compreende, segundo BCBS [14], em termos percentuais do total da dívida, a PDI. Portanto, seja τ a taxa de recuperação de um empréstimo que tenha entrado em *default*, sua PDI será: $PDI = (1 - \tau)$.

A exposição bruta (EB) de um tomador de crédito é definida como o somatório do fluxo de recebimentos de todas as operações de crédito do cliente trazidos a valor presente com a adequada taxa de desconto. Contudo, em grandes bases de dados, a exposição bruta corresponde ao somatório do saldo contábil das operações de crédito do cliente, haja vista que adequar ao conceito original demandaria um enorme esforço computacional. Além disso, o saldo contábil representa o resultado do que já foi pago e o que ainda resta a amortizar em cada operação.

A exposição líquida (EXL) do tomador, ou simplesmente valor de exposição, é o produto da exposição bruta e a PDI; $EXL = EB \times PDI$, ou seja, representa em valor monetário o quanto o banco se expõe (valor que de fato perderá em situação de inadimplência) ao realizar uma determinada operação, também conhecida como severidade.

A perda esperada - PE (*Expected Loss-EL*), por sua vez, é o produto da probabilidade de *default* e a EXL: $PE = PD \times EXL$, ou seja, essa formulação é válida sob a suposição de que a PDI, EB e a PD são independentes, ou ainda, a PDI e a EB são constantes, como descreve Bluhm *et al.*[18]. A PE de toda a carteira, com a suposição de independência dos tomadores de crédito, será: $PE_{carteira} = \sum_{i=1}^n PD_i \times EXL_i$, onde n é o número total de clientes da carteira.

1.2.1 Modelos de Regressão Logística e Modelos de Credit Scores

Os modelos de *Credit Scoring* são sistemas que atribuem pesos estatisticamente predeterminados a alguns atributos do solicitante para gerar um escore de crédito. Visam, por meio desses escores, discriminar características que distingam bons e maus pagadores, conforme Caouette *et al.* [22].

A abordagem de *credit score* para estimação da PD mencionada na seção 1.2, possui especial interesse em países em que não há uma tradição em calibração da PD via *ratings*. Tal metodologia, em geral, é utilizada apenas para o tratamento de clientes PJ. No caso brasileiro (e em geral para o caso de países emergentes), o mais comum é a utilização das metodologias de *credit score*. Em bancos comerciais, onde

o público de atendimento compreende tanto de clientes PF quanto PJ, os modelos de *credit score* que utilizam regressão logística são mais diretamente aplicados e mais largamente implementados. Outro aspecto que influencia a escolha desta metodologia está relacionada à quantidade de clientes na base de informações. A atualização das estimativas (em média) da PD de grandes bases de dados utilizando regressão logística tem uma *performance* mais veloz e direta. Desta forma tornou-se a técnica mais difundida no mercado, segundo Rosa [57].

Os modelos de regressão logística são casos particulares dos modelos lineares generalizados, constituídas pelos modelos *logit*, nos quais a variável dependente pode ser associada a uma variável aleatória Bernoulli¹.

Considere uma coleção de r variáveis independentes representadas por $X=(X_1, \dots, X_r)'$, onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)'$ é um valor particular e uma variável aleatória dependente Y de natureza binária. Seja $g(x)$ a função *logit*, que representa a combinação linear das r variáveis preditoras

$$g(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_r x_r. \quad (1.1)$$

O objetivo é apresentar um modelo para prever $P(Y = 1|\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x})$, onde

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\exp[g(\mathbf{x})]}{1 + \exp[g(\mathbf{x})]} \quad (1.2)$$

Sejam y_1, \dots, y_n , n independentes observações de Y associadas aos valores de $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir})$, para $i \in 1, \dots, n$. O *logit* dado pela expressão (1.1), será

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(\mathbf{x}_1) = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \dots + \beta_r x_{1r} + \epsilon_1 \\ g_2 &= g_2(\mathbf{x}_2) = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \dots + \beta_r x_{2r} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ g_n &= g_n(\mathbf{x}_n) = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \dots + \beta_r x_{nr} + \epsilon_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde os erros ϵ_i , seguem as seguintes suposições:

¹Para detalhes ver Hosmer e Lemeshow [34].

- (i) $\mathbb{E}(\epsilon_i | \mathbf{x}_i) = 0$,
- (ii) $Var(\epsilon_i | \mathbf{x}_i) = \pi(\mathbf{x}_i)[1 - \pi(\mathbf{x}_i)]$,
- (iii) $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$, se $i \neq j$, $\forall i, j \in 1, \dots, n$.

As variáveis aleatórias Y_1, \dots, Y_n satisfazem um modelo logístico múltiplo se uma amostra de tamanho um de cada Y_i pode ser expressa como

$$y_i = \frac{\exp(g_i)}{1 + \exp(g_i)} + \epsilon_i,$$

onde g_i é obtida pela expressão (1.3), na qual x_{ik} é constante e conhecida, β_k é parâmetro desconhecido do modelo e os erros ϵ_i seguem as suposições apresentadas anteriormente. Como a intenção é a estimação dos coeficientes β_0, \dots, β_r , podemos considerar então, uma generalização em forma matricial. Para tanto considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (y_1, \dots, y_n)'_{1 \times n} \\ \mathbf{\Pi} &= (\pi_1, \dots, \pi_n)'_{1 \times n} \\ \mathcal{B} &= (\beta_1, \dots, \beta_r)'_{1 \times (r+1)} \\ \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1r} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nr} \end{bmatrix}_{n \times (r+1)} \\ \mathbf{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \pi_1(1 - \pi_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_2(1 - \pi_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_n(1 - \pi_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

Os coeficientes \mathcal{B} são parâmetros a serem estimados pelo método de máxima verossimilhança. Para uma amostra de tamanho n , teremos

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}$$

O estimador de \mathcal{B} , pelo método de máxima verossimilhança, denotado por $\hat{\mathcal{B}}$, é a solução das equações de verossimilhança

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - \pi_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} (y_i - \pi_i) &= 0, \quad \text{para, } j \in \{1, \dots, r\}.\end{aligned}$$

No modelo de regressão linear, as equações de verossimilhança pode ser resolvidas de maneira direta. Para o modelo de regressão logística, tais equações são não-lineares nos parâmetros e desta forma, requer-se o uso de procedimentos iterativos de otimização².

Podemos representar todas as $r + 1$ equações de verossimilhança, em notação matricial, através de

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}} \mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{\Pi}) = 0$$

Existem três testes distintos que são mais frequentemente utilizados para se testar a significância de todos os $r + 1$ coeficientes do modelo, muito embora tais testes sejam assintoticamente equivalentes, baseados no princípio da máxima verossimilhança. A escolha entre eles vai depender, em cada caso, do conhecimento de suas propriedades para amostras pequenas, quando disponível, e da conveniência computacional. Esses três testes são denominados: teste da razão de verossimilhança, teste de Wald e teste do multiplicador de Lagrange. Para detalhamento desses testes ver Mood *et al.*[50] e Hosmer e Lemeshow [34].

²O método de Newton-Raphson é o mais comum para os casos de regressões logísticas. Resumidamente, este método assume uma solução inicial (um candidato) para os valores que maximizam a função de verossimilhança. A função é aproximada em uma vizinhança da solução inicial por um polinômio de segundo grau. A segunda solução obtida no processo iterativo é o ponto de máximo valor do polinômio. E assim segue gerando-se uma sequência de soluções que convergem para o ponto máximo da função de verossimilhança. Uma alternativa a este método é apresentado no apêndice D.

1.3 Valor em Risco e Capital Econômico

O conceito de valor em risco (*Value at Risk* - V@R), originalmente criado para mensurar o risco de mercado pela empresa JP Morgan, como descrevem Jorion [37] e Linsmeier *et al.*[41], foi rapidamente disseminado para a área de risco de crédito (Allen *et al.*[3]). O V@R pode ser compreendido como o quantil de uma distribuição. Usualmente diz-se que o V@R é a perda potencial para um determinado nível de confiança (unicaudal) e horizonte de tempo definido (no caso de risco de crédito em geral de um ano). Uma definição mais formal do conceito de V@R pode ser encontrado em Gundlach e Lehrbass [30].

V@R de Crédito é a perda máxima para um período (em geral um ano) sendo definido como: $V@R_\epsilon[X] = \inf(c \in \mathfrak{R} : P[X \leq c] \geq \epsilon)$ onde X representa a perda agregada e ϵ representa um percentil (em geral, para crédito, esses percentis são arbitrariamente escolhidos entre o percentil 95% e o 99,9%).

Para a definição de CE, temos a seguinte relação:

$$PI_\epsilon[X] = V@R_\epsilon[X] - PE$$

onde $PI_\epsilon[X]$ = Perda Inesperada (*Unexpected Loss* - *UL*) = CE.

Essa relação pode ser observada, de maneira ilustrativa, na Figura 1.1:

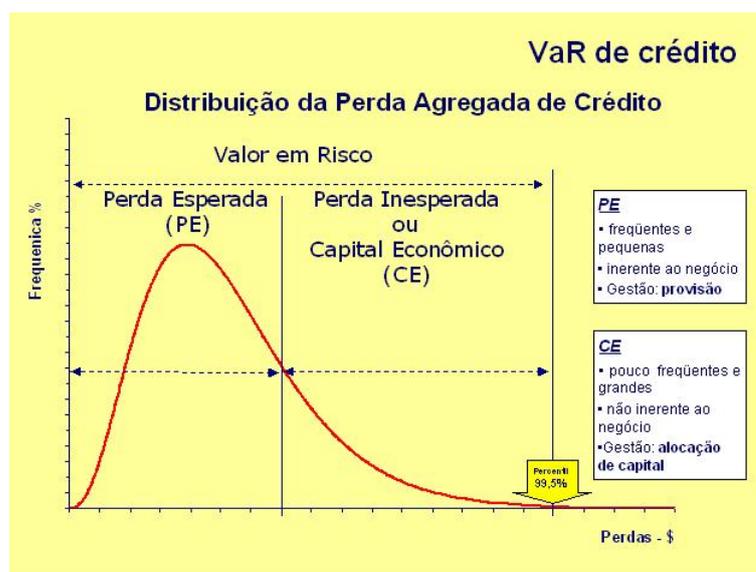


Figura 1.1: Conceito de Capital Econômico e V@R de Crédito

No modelo CreditRisk+ (CR+), que será foco dos estudos apresentados nesta dissertação, a distribuição de perda é discreta e, por esse motivo, é necessária a utilização de algumas aproximações, conforme sugere Gundlach e Lehrbass [30]:

$$V@R_\epsilon[X] \approx \bar{\rho}_\epsilon(X) = \inf(n \in \mathbb{N} : P[X \leq c] \geq \epsilon)$$

ou ainda por meio de uma interpolação linear;

$$V@R_\epsilon[X] \approx \rho_\epsilon(X) = \bar{\rho}_\epsilon(X) - 1 + \frac{\epsilon - P([X \leq \bar{\rho}_\epsilon(X) - 1])}{P([X = \bar{\rho}_\epsilon(X)])}$$

Uma outra sugestão de interpolação também encontrada em Gundlach e Lehrbass[30], considera para um percentil³ q particularmente escolhido o V@R sendo dado por:

$$V@R_{(q,(q_1,q_2))} = U \times \left[(v_{A_{q_2}} - 1) + \left(\frac{q - q_1}{q_2 - q_1} \right) \right].$$

Segundo BCBS [11], os "bancos devem gerir o risco de crédito de toda sua carteira de forma conjunta assim como suas exposições individuais". A gestão do risco conjunto (probabilidade conjunta) da carteira é o objetivo dos modelos baseados em uma metodologia de V@R.

³Ainda de maneira preliminar, $v_{A_{q_2}}$ nessa interpolação representa, o valor de perda discretizada associada à probabilidade acumulada da distribuição de perda agregada até q_2 , onde $q \in [q_1, q_2]$. Os valores q_1 e q_2 serão os percentis obtidos por exemplo pelo algoritmo recursivo de Panjer. O valor de U representa a amplitude das faixas discretizadas.

1.4 Basiléia II, Capital Econômico Regulatório e o Caso Brasileiro

Após a crise da dívida externa de 1982 iniciada no México, cresceu a preocupação a respeito do capital dos maiores bancos internacionais. Diante desse cenário, instituições supervisoras dos países do G10⁴ promulgaram, em 1988, o Acordo de Capital da Basiléia, definindo que os bancos deveriam manter um capital mínimo relativo de 8% em relação a sua carteira total de ativos, ponderadas de formas diferentes de acordo com a suscetibilidade desses ativos ao risco de crédito e de mercado.

Seu principal objetivo era equalizar as diferenças entre os sistemas financeiros nacionais com respeito às exigências de capital mínimo e atenuar vantagens e desvantagens competitivas no mercado financeiro internacional oriundas dessas diferenças, BCBS [10,13]. Bancos sujeitos a menores requerimentos de capital poderiam oferecer mais crédito a taxas diferenciadas aos clientes, como afirma Maia [43].

Após as crises ocorridas na Ásia e Rússia, respectivamente em 1997 e 1998, o mercado financeiro internacional tomou uma nova consciência dos riscos aos quais os diversos sistemas bancários estavam expostos. O Comitê de Basiléia, vinculado ao Bank for International Settlements (BIS), colocou em discussão novas recomendações que foram repassadas aos bancos centrais, sugerindo melhorias nos controles de risco (Meyer[48]).

“Acordo deve centrar-se nos bancos internacionalmente ativos, embora seus princípios básicos devam ser adequados para aplicação em bancos de diferentes níveis de complexidade e sofisticação.”, BCBS [12]. O Comitê de Basiléia propôs um novo Acordo (conhecido como Basiléia II, ou Acordo de Basiléia II) com um sistema baseado em três pilares que teriam em conjunto a função de aumentar os níveis de segurança e solidez dos sistemas financeiros onde aplicados:

- Pilar I: trata dos requisitos mínimos de capital econômico regulatório;

⁴O Grupo dos Dez (G10) é uma organização internacional que hoje reúne representantes de onze economias. O G10 foi fundado em 1962 por representantes dos governos centrais de Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Rússia, França, Itália, Japão, Holanda e Reino Unido; e dos bancos centrais da Alemanha Ocidental e Suécia.

- Pilar II: trata dos métodos de supervisão dos agentes reguladores (bancos centrais);

- Pilar III: trata da disciplina de mercado, que corresponde às publicações de informações bancárias para todo o mercado.

No pilar I, muito embora tenha orientações para estimação do CER para o risco de mercado, liquidez e operacional, apresentaremos apenas as tratativas para o risco de crédito. Nesse pilar, o tratamento do risco de crédito com finalidade de estimação do CER pode seguir duas linhas:

- Abordagem padrão: utiliza *ratings* externos para estimação do CER;

- Abordagem baseada em *ratings* interno (*Internal Rating Based* - IRB): esta abordagem subdivide-se em outras duas possibilidades:

-IRB básico: o banco estima por meio de seus modelos proprietários as PD e os valores dos demais componentes são fornecidos pelo regulador;

-IRB avançado: todos os componentes de risco de crédito são estimados por meio de modelos proprietários.

Na abordagem IRB, o CER é calculado com base em um modelo V@R de crédito, com nível de confiança de 99,9% e horizonte de tempo de um ano. A fórmula calcula em um primeiro passo o seguinte valor:

$$K = PDI \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + R^{0,5} \times \Phi^{-1}(0,999)}{(1 - R)^{0,5}} \right) - PD \right]$$

onde Φ é a função de distribuição da normal padrão, Φ^{-1} é a inversa da função de distribuição da normal padrão, o R é a correlação estabelecida por Basiléia. A fórmula do K “transforma” a probabilidade de *default*, a partir de sua média não condicional para a média condicional a um quantil de 99,9% da distribuição de estados da economia, conforme BCBS [15]. O capital exigido é crescente em relação à PD e PDI, ou seja, operações mais arriscadas estão sujeitas a maior requerimento de capital. O capital também é função da “correlação de Basiléia”, sendo que quanto maior este valor entre os eventos de inadimplência, maior o requerimento de capital. O valor da correlação é dado por uma fórmula que tem diferentes valores para cada classe de ativo. Apresentamos a fórmula para as classes Corporate e Varejo. Nestas duas classes, a correlação é decrescente em relação à PD. No varejo a carteira é mais

diversificada e os eventos de inadimplência dependem mais do risco idiossincrático do que do “estado da economia”. Por essa razão, a correlação é menor.

$$R_{corporate} = 0,12 \times \left[\frac{1 - e^{-50 \times PD}}{1 - e^{-50}} \right] + 0,24 \times \left[1 - \frac{1 - e^{-50 \times PD}}{1 - e^{-50}} \right],$$

$$R_{varejo} = 0,03 \times \left[\frac{1 - e^{-35 \times PD}}{1 - e^{-35}} \right] + 0,16 \times \left[1 - \frac{1 - e^{-35 \times PD}}{1 - e^{-35}} \right].$$

Temos, conforme BCBS [13],

$$CER = K \times EB \times 12,5.$$

A implementação do Acordo de Basiléia II no contexto brasileiro se deu por meio do Comunicado 12.746 de 9 de dezembro de 2004 do Banco Central com o título: “Os procedimentos para a implementação da nova estrutura de capital - Basiléia II”. O CER no caso brasileiro guarda, contudo, algumas peculiaridades. Primeiramente, não será utilizada no Brasil a abordagem padronizada, segundo, o percentual utilizado para o CER não segue a formulação original de 8%, sendo no Brasil 11% sobre os ativos já considerados os fatores de ponderação de cada risco (crédito, mercado, liquidez e operacional). Segundo BCBS [14], seria utilizado no lugar da EB a exposição no momento do *default* quando calculada ou fornecida pelo regulador (*Exposure at Default - EAD*).

1.5 Visão Geral dos Modelos de Capital Econômico e Adequação ao Contexto Brasileiro

Nas últimas décadas, a indústria financeira produziu as principais metodologias de V@R de crédito. O uso dessas metodologias no contexto brasileiro, em geral, é prejudicado por limitações de quantidade e de tipo de dados que tais metodologias exigem, ou ainda pelas premissas que são assumidas. Faremos então uma breve apresentação dos modelos mais utilizados segundo Bluhm *et al.* [18] e suas limitações para implementação no contexto brasileiro, segundo Schechtman *et al.* [59].

O modelo KMV (Moody's [51]), foi uma das metodologias pioneiras na área de risco de crédito. É uma metodologia fundamentada na teoria do apreamento de opções e foi desenvolvido seguindo a linha de pesquisa de Merton [47] e Black e Scholes[17]. Supõe-se que o preço das ações de empresas negociadas em mercado aberto reflete as expectativas do mercado sobre a empresa. Se o valor de mercado de seus ativos superar o valor do empréstimo, os proprietários da empresa têm um incentivo para pagar ao credor e reter o valor residual como lucro. Caso contrário, a empresa devedora poderá tomar a decisão de entregar os seus ativos. Esse tipo de modelo é chamado de “estrutural” e trabalha essencialmente com medidas “econômicas” de risco.

Sua aplicabilidade no contexto brasileiro é prejudicado por utilizar em seu conceito de *default* informações do mercado acionário como apenas grandes empresas possuem ações negociadas na bolsa de valores, esta metodologia fica limitada à estimação do CE apenas para clientes PJ (Schechtman *et al.* [59]). Outra limitação, de caráter mais teórico, diz respeito à comparação entre ativo e passivo, que pode ser prejudicada por exposições potenciais a risco que não representam exposição imediata, mas podem vir ou não a ser um passivo do devedor. Outra limitação teórica importante, para o caso brasileiro, é o fato de que em mercados financeiros afetados por volatilidades geradas por posições especulativas, o valor das ações das empresas na verdade, “quase nunca” representa a verdadeira expectativa do mercado acerca de uma empresa.

Outra importante metodologia é conhecida como *CreditMetrics* desenvolvida pela JP Morgan. Como podemos encontrar em Gupton *et al.*[31], o modelo *CreditMetrics* baseia-se na abordagem de risco de *spread*⁵. Essa abordagem estabelece uma relação entre a probabilidade de migração de *rating* e os diferentes valores de *spread* e estima por fim uma curva de rendimento de crédito. A metodologia procura estabelecer qual será a perda de uma carteira de crédito devido a alterações na classificação de crédito dos devedores, além das ocorrências de *default*. O modelo utiliza dados disponíveis sobre a classificação de crédito do devedor, as probabilidades de que essa classificação mude ao longo do tempo (mapeadas pelo uso intenso de uma matriz de migração de

⁵*Spread*: diferença entre o preço de compra e de venda de um título ou moeda. É, em última instância, o lucro da operação financeira. Também valendo para a diferença entre taxas de juros pagas a depositantes e taxa de juros de tomadores de crédito.

rating). Os dados serão variáveis *proxy* dos índices de recuperações de cada faixa de classificação e os *spreads* de curvas de crédito obtidas nos mercados secundários.

No Brasil em particular, o mercado secundário de crédito é muito restrito. Como afirma Schechtman *et al.*[59], em geral as operações são levadas ao vencimento, dificultando a estimação de valor de mercado dos *spreads* de crédito, o que torna-se uma limitação a utilização dessa metodologia. Outra restrição é o fato de que o *CreditMetrics* presume a existência de uma consistente matriz de migração de *rating* com um longo histórico, o que não é disponível no caso brasileiro, além do que restringe seu uso à estimação de CE novamente apenas para clientes PJ.

O modelo de fatores da McKinsey, conhecido como *CreditPortfolioView*, baseia-se na relação entre as probabilidades de *default* dos devedores e fatores macroeconômicos (McKinsey and Company [46]). Assim como no modelo *CreditMetrics*, parte-se de uma matriz de migração de *ratings*. Contudo, as probabilidades podem variar ao longo do tempo de acordo com o estado da economia (Wilson [60,61]).

Dados macroeconômicos sem quebras estruturais são praticamente inexistentes no mercado brasileiro, o que é resultado das inúmeras mudanças de regime econômico que passamos ao longo dos últimos anos (Schechtman *et al.* [59]), o que compromete o uso dessa metodologia no Brasil.

Neste estudo, será implementada a metodologia conhecida como CreditRisk+ ou ainda CR+, desenvolvida por Wilde, publicada pela Credit Suisse Financial Product (CSFP) em 1997 [21]. Em muitos estudos, como Bluhm *et al.* [18], o CR+ é uma metodologia classificada como modelo atuarial de risco de crédito. Isso decorre do fato de que, muito embora tenha uma abordagem que surgiu para o mundo de crédito apenas em 1997, sua base teórica de estimação de perda agregada, por meio de processos compostos de Poisson via recursividade de Panjer precede o CR+ em muitos anos, como temos em Panjer [53].

Dentro das metodologias citadas, a mais difundida e popular, segundo Avesani *et al.* [5] e Gundlach e Lehrbass [30], é a metodologia do CreditRisk+. Esses autores relacionam alguns motivos para essa predileção:

- 1)requer um número limitado de dados de entrada;
- 2)o único modelo de CE focado no evento de *default*;
- 3)versátil na expansão de suas aplicações;

4)utiliza as mesmas variáveis básicas requeridas pelo novo Acordo de Basiléia II na abordagem IRB;

5)determina a distribuição de perda agregada por meio de uma solução analítica computacionalmente eficiente (relativamente), evitando o uso dos métodos de simulação de Monte Carlo⁶.

O modelo utiliza técnicas de matemática atuarial juntamente com a teoria de probabilidade para calcular recursivamente a distribuição probabilística da perda agregada, e não faz conjecturas sobre as causas dos eventos de *default*. Além disso, supõe que as probabilidades de *default* individuais são relativamente pequenas e que o número de devedores é alto. A descrição formal dessa metodologia e suas fragilidades serão apresentadas em detalhes nos próximos capítulos deste estudo. Apresentamos na tabela 1.1 com as diferenças entre os quatro principais modelos de V@R de crédito que resume esta seção.

⁶O método de simulação de Monte Carlo é um método estatístico de simulações estocásticas. Este método tipicamente envolve a geração de observações de alguma distribuição de probabilidade e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse, contudo, as simulações com esse método demandam enorme esforço computacional

Tabela 1.1 - Comparativo dos Principais Modelos de V@R de Crédito				
Diferenças Entre as Principais Metodologias de Estimação de V@R de Crédito				
Característica	KMV	CreditMetrics	Credit Portfolio View	CreditRisk+
Direcionador de risco	Apreçamento de Ativos	Apreçamento de Ativos	Fatores Macroeconômicos	Eventos de Default
Conceito de Default	Diferença entre preço de ativos	Marcação a Mercado do Valor de Empréstimo	Marcação a Mercado do Valor de Empréstimo	Risco de Default
Caracterização do Conceito de Default	Tempo Contínuo	Upgrades e Dowgrades na Matriz de Migração de Rating	Upgrades e Dowgrades na Matriz de Migração de Rating	Tempo Discreto
Correlações	Modelagem dos Fatores no Apreçamento de Ativos	Modelagem dos Fatores na Precificação de Ativos no Mercado Secundário de Crédito	Implícitas nos Fatores Macroeconômicos	Implícitas no Conceito de Setores
Severidade (EXL)	Estocástica (Distribuição Beta) ou Determinística	Estocástica (Distribuição Beta) ou Determinística	Estocástica e Empiricamente Calibrada	Determinística, Estocástica (Várias Distribuições)
Tipo de Clientes	PJ com Ações Negociadas em Bolsa de Valores	PJ com Ativos Negociados em Mercado Secundário de Crédito e com Histórico em uma Matriz de Migração de Rating	PJ ou PF com Histórico em uma Matriz de Migração de Rating	PJ e PF que Possuam PD Calculada e EXL
Base de Dados	Mercado Acionário e Dados Internos	Mercado Secundário de Crédito e Matriz de Migração de Rating (Interno ou Externo)	Matriz de Migração de Rating (Interno ou Externo)	Dados Internos dos Componentes de Risco de Crédito

Fonte: Bluhm et. Al. [18] e alterações do autor.

Figura 1.2: Tabela Comparativa dos Principais Modelos de V@R de Crédito

Capítulo 2

O Modelo CreditRisk+

2.1 Introdução

A partir dos conceitos apresentados no último capítulo e Das razões apresentadas para a escolha do modelo CreditRisk+. com a finalidade de estimação da perda agregada, detalharemos o modelo originalmente publicado por CSFP [21], abordando também, de maneira pontual, aspectos teóricos relevantes não detalhados na publicação original, como as funções geradoras, as distribuições compostas, recursividade de Panjer e a estimação via métodos dos momentos dos parâmetros da distribuição Gama dos setores.

Apresentaremos o modelo CreditRisk+ conforme o detalhamento e notação apresentados em Gundlach e Lehrbass [30]. Apresentaremos, na seção 2.2, a notação e os ajustes utilizados no modelo CR+ para os componentes de risco de crédito discutidos na seção 1.2. Na seção 2.3 faremos uma breve introdução dos conceitos de momentos e das funções geradoras, pois, a partir de algumas dessas funções, se seguirão os desenvolvimentos do modelo CR+. Apresentaremos na seção 2.5 os conceitos de distribuições compostas, como é o caso no modelo CR+, e as definições da recursividade de Panjer em um contexto geral. Na sequência, apresentaremos na seção 2.6 sua aplicação para o contexto do modelo CR+ apresentando, portanto, a fórmula analítica de estimação da distribuição de perda agregada.

2.2 Componentes de Risco de Crédito no Modelo CreditRisk+

Considere uma carteira de empréstimos com N devedores, ou seja, temos $A = 1, \dots, N$, cada um com uma probabilidade de *default* \tilde{p}_A . A PD assume por hipótese, reflete de fato a probabilidade individual de *default*, quando na prática é o resultado de algum modelo de estimação de PD como o apresentado na seção 1.2, e dessa forma torna-se uma expectativa média da frequência de inadimplência (Frequência Esperada de Inadimplência - FEI) para clientes com determinado perfil de crédito.

Considere V_A a exposição bruta do devedor A . Essa exposição resume todo o valor de suas operações de crédito. Seja \tilde{v}_A a exposição líquida do devedor A , sua severidade, já considerados os efeitos da PDI. Teremos então que a perda esperada para qualquer devedor A será:

$$PE_A = \tilde{p}_A \times \tilde{v}_A.$$

Na implementação computacional do modelo CreditRisk+, é prática comum a discretização das exposições individuais com a finalidade de agrupá-las em faixas de exposições (bandas). Dessa forma, temos a discretização de uma variável contínua: a exposição do devedor. Seja U o tamanho de cada intervalo de faixa. A exposição ajustada e arredondada do devedor A é denotada como o valor maior inteiro v_A e definida como:

$$v_A = \left\lceil \frac{\tilde{v}_A}{U} \right\rceil. \quad (2.1)$$

No modelo CR+ o U é definido como:

$$U = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{B}.$$

onde B é o Número de faixas de exposição admitido, em geral escolhido de maneira *ad hoc*. Esse procedimento limita o número de possíveis valores de perda agregada e, portanto, reduz o tempo de processamento de sua distribuição de probabilidade.

Contudo, a distribuição final de perda agregada é sensível ao número de faixas do modelo. Um número de faixas muito grande (e no caso extremo igual a \tilde{v}_A) pode tornar o modelo computacionalmente impraticável, e um número muito pequeno de faixas pode distorcer significativamente a distribuição de perda agregada. Porém, os impactos e alternativas da escolha do número de faixas serão tratados nos capítulos seguintes.

A fim de compensar o erro de arredondamento causado pela aproximação da probabilidade \tilde{p}_A e garantir preservada a EL_A , o modelo propõe o seguinte ajuste:

$$p_A = \frac{EL_A}{v_A} \times U$$

onde temos a relação $p_A \times v_A = \tilde{p}_A \times \tilde{v}_A \times U$.

Como já descrito anteriormente, a p_A descreve muito mais uma expectativa do que um valor real de probabilidade. Essa expectativa representa uma média durante um determinado período, uma determinada condição econômica em diferentes países ou indústrias para devedores de um mesmo perfil de risco. A fim de compensar e contabilizar o efeito econômico de um grupo de clientes pertencentes a uma indústria específica e afetados da mesma maneira pelas condições econômicas, um devedor A tem a p_A ajustada por meio de um fator escalar aleatório que representa o risco específico da indústria em questão. Este procedimento no modelo CR+ representa a inclusão da análise setorial.

A análise setorial no modelo CR+ atende ainda a um outro ajuste na p_A . Como p_A reflete a expectativa de um valor de probabilidade em um período fixo de tempo (em geral um ano), implicitamente supõe-se que a p_A seja determinística e não oscile nesse período. Contudo, a p_A pode apresentar caráter estocástico e deve oscilar nesse período refletindo as diferentes condições apresentadas anteriormente. Dessa forma, a análise setorial inclui, por meio das participações percentuais do valor de empréstimo de cada devedor em cada setor, uma volatilidade a p_A . Tal volatilidade terá comportamento semelhante para clientes de um mesmo setor. Em um exemplo didático, os setores poderiam ser tratados como o tipo de pessoa (PF ou PJ), ou ainda diferentes indústrias da economia.

Dessa forma, considere K diferentes e independentes setores s_1, \dots, s_K com seus

correspondentes fatores aleatórios escalares $S_k, k = 1, \dots, K$, que são chamados fatores de risco. Cada devedor pode estar ativo em vários setores, e para tal o modelo inclui o peso fixo w_{Ak} dessa participação, que deve satisfazer as seguintes condições:

- 1) $0 \leq w_{Ak} \leq 1$;
- 2) $\sum_{k=1}^K w_{Ak} \leq 1$.

Algumas definições foram atribuídas a essas participações fixas:

- $\sum_{k=1}^K w_{Ak}$: risco sistemático de *default* para o cliente A;
- $w_{A0} = 1 - \sum_{k=1}^K w_{Ak}$: risco idiossincrático de *default* para o cliente A.

Observe que se não houver risco idiossincrático, ou seja, $w_{A0} = 0$, então teremos $\sum_{k=1}^K w_{Ak} = 1$.

Existindo apenas um setor e $w_{A0} = 0$, w_{Ak} torna-se uma variável indicadora;

$$w_{Ak} = \begin{cases} 1, & \text{se } A \in g_K \\ 0, & \text{se } A \notin g_K \end{cases}$$

onde g_1, \dots, g_K são subconjuntos disjuntos de $\{1, \dots, N\}$, tais que $g_k = \{A_1, \dots, A_{n_K}\}$, $A_i \in (1, \dots, N)$ e $i = 1, \dots, n_K$, é o i -ésimo indivíduo no setor s_K .

O risco idiossincrático está relacionado ao risco específico e individual de um cliente, a parcela de inadimplência que não está associada à participação em nenhum setor. Uma das suposições do modelo é que, condicionalmente a S , todos os devedores são independentes. O instrumental de independência condicional é um traço comum nos modelos de V@R de crédito.

Por hipótese, os fatores de risco S_k são variáveis aleatórias independentes com distribuição gama, $S_k \sim \text{Gama}(\alpha_k, \beta_k)$. Condicionalmente aos $S = (S_0, S_1, \dots, S_k)$, com $S_0=1$, temos que a PD será dada da seguinte forma (Gundlach e Lehrbass [30]):

$$\begin{aligned}
p_A^S &= p_A \left(1 + \sum_{k=1}^K w_{Ak} \left(\frac{S_k}{\mathbb{E}[S_k]} - 1 \right) \right) \\
&= p_A \left(\underbrace{1 - \sum_{k=1}^K w_{Ak}}_{w_{A0}} + \sum_{k=1}^K w_{Ak} \frac{S_k}{\mathbb{E}[S_k]} \right) \\
p_A^S &= p_A \sum_{k=0}^K w_{Ak} \frac{S_k}{\mathbb{E}[S_k]}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[p_A^S] &= p_A \left(\underbrace{\sum_{k=0}^K w_{Ak}}_1 \underbrace{\mathbb{E} \left[\frac{S_k}{\mathbb{E}[S_k]} \right]}_1 \right) = p_A \\
\text{var}[p_A^S] &= p_A^2 \sum_{k=1}^K \frac{w_{Ak}^2}{\mathbb{E}[S_k]^2} \text{var}[S_k].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Por fim, vale ressaltar que a própria definição de setores no modelo CreditRisk+ lidera uma linha de pesquisa, como podemos ver em Boegelein *et. al.*[19] e Lesko *et. al.*[40]. Outra linha de pesquisa trata diferentes distribuições além da gama e considera casos de distribuições dependentes como apresentado em Giese [28], Binnenhei [16] e Reiß[55]. Setores correlacionados são tratados em Akkaya *et al.*[2]. Destacamos ainda que a descrição da análise setorial apresentada nessa seção não está contida no documento original do modelo do CSFP [21].

2.3 Momentos e Funções Geradoras

Nessa seção faremos apenas uma breve introdução aos conceitos de momentos e funções geradoras que atendam às necessidades teóricas para o desenvolvimento do

modelo CR+ que se seguirá, sem contudo detalhar todo o arcabouço matematicamente formal necessário para uma discussão mais profunda do tema. Para esse fim, recomendamos Kao [38] e Jones e Smith [36].

Quando se trabalha com uma distribuição de probabilidade, seja discreta ou contínua, é essencial conhecer o suporte da correspondente variável aleatória (o conjunto de valores que a variável aleatória pode assumir), ou vetor aleatório, e a respectiva função de probabilidade ou função densidade de probabilidade, ou ainda, alternativamente a função distribuição.

O conhecimento somente do suporte da variável aleatória não permite compreender completamente a estrutura da distribuição probabilística em questão. De um modo geral, essa estrutura está muito distante da uniformidade, sendo esperado que a mesma se concentre em torno de um ponto distante dos extremos do domínio da variável aleatória, atenuando-se à medida que se caminha para esses extremos.

Portanto, tornou-se necessário o desenvolvimento de instrumentos que forneçam indicações, razoavelmente seguras e interpretáveis, sobre o modo como a probabilidade se distribui ao longo do suporte da variável aleatória em estudo. Um desses instrumentos são os designados momentos, que são, em essência, de dois tipos: momentos em relação a uma certa constante $c \in \mathfrak{R}$, e momentos absolutos em relação a essa mesma constante.

Seja, então, X uma variável aleatória contínua qualquer e $G(X)$ uma função mensurável da mesma, sendo também uma variável aleatória. Seguem então as seguintes definições, conforme Feller [25,26]:

-Momentos de ordem $n \in \mathbb{N}$ em relação a $c \in \mathfrak{R}$:

$$\mathbb{E}[(G(X) - c)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - c)^n dF_X(x)^1.$$

onde $F_X(\cdot)$ é a função de distribuição de X .

Se se considerar a função da variável aleatória X como $G(X) = X$ e $c = 0$ teremos:

-Momento ordinário de ordem $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x).$$

¹Esta é conhecida como a integral de Lebesgue, e é uma generalização da integral de Riemann.

Ao primeiro momento ordinário de uma variável aleatória, discreta ou contínua, dá-se o nome de valor médio, que pode ser considerado o principal indicador de posição da distribuição. Com o valor médio definimos então:

-Momento central de ordem $n \in \mathbb{N}$, com $\mathbb{E}[X] = \mu$:

$$\mathbb{E}[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n dF_X(x).$$

De modo geral, se $p_n, n \in \mathbb{N}$, for uma sucessão de termos em \mathfrak{R} , à série de potências de t

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \quad (2.5)$$

dá-se o nome de função geradora dos termos da sucessão p_n e onde a série é suposta absolutamente convergente no conjunto definido pela condição $|t| \leq r$, com $r \in \mathfrak{R}_0^+$. Tal convergência pode ser verificada por meio de comparação com a série geométrica.

Assim, quando se trata de uma variável aleatória discreta, definida em \mathbb{N}_0 e que atenda as seguintes condições:

- $P(X = n) = p_n$;
- $p_n \geq 0$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

a função (2.5) geradora toma a designação de função geradora de probabilidades - FGP (*Probability Generating Function* - PGF). Observe ainda que

$$\Phi_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x t^x = \mathbb{E}[t^X]. \quad (2.6)$$

Outra importante função geradora está relacionada com os conceitos de momentos. A função geradora de momentos - FGM(*Moment Generating Function* - MGF) é definida como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad (2.7)$$

onde

$$M_X(t) = \Phi_X(e^t). \quad (2.8)$$

Contudo, a função geradora de maior importância é denominada de função característica - FC (*Characteristic Function* - CF), definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}] \quad (2.9)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $M_X(it) = \varphi_X(t)$.

Por fim, apresentamos a função geradora de cumulantes - FGC (*Cumulant Generating Function* - CGF), que retorna os valores da função de distribuição de X:

$$\mathbb{K}_X(t) = \log(\Phi_X(t)) \quad (2.10)$$

ou

$$\mathbb{K}_X(t) = \log(M_X(t)) \quad (2.11)$$

ou ainda

$$\mathbb{K}_X(t) = \log(\varphi_X(t)). \quad (2.12)$$

A maior parte de todas essas definições será utilizada na sequência de desenvolvimentos do modelo CR+

2.4 Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+

A perda agregada do devedor A pode ser representada por uma variável aleatória $X_A = \mathbb{I}_A \cdot v_A$, onde;

$$\mathbb{I}_A = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ entra em } \textit{default} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A distribuição de probabilidade de X_A é dada por $P(X_A = v_A) = p_A$ e por $P(X_A = 0) = 1 - p_A$. A perda agregada total do portfólio, considerando a independência dos devedores, será representada pela variável aleatória X :

$$X = \sum_{A=1}^N X_A = \sum_{A=1}^N \mathbb{I}_A \cdot v_A.$$

O principal objetivo do modelo é estimar de maneira computacionalmente eficiente a distribuição de X e então determinar o V@R e outras medidas de risco da carteira de crédito.

Uma maneira eficiente de calcular a distribuição de perda agregada é via a FGP, onde X assume apenas valores inteiros não negativos, como apresentado na seção 2.3. Observe que a FGP para uma variável de Bernoulli Y com probabilidade p é dada, conforme (2.5), por :

$$G_Y(z) = (1 - p)z^0 + pz^1 = p(z - 1) + 1.$$

Da mesma forma, a FGP para a distribuição de perda agregada será dada por:

$$G_A(z) = (1 - p_A)z^0 + p_A z^{v_A} = 1 + p_A(z^{v_A} - 1). \quad (2.13)$$

Considerando então a FGP condicional a S , teremos:

$$G_A(z|S) = (1 - p_A^S)z^0 + p_A^S z^{v_A} = 1 + p_A^S(z^{v_A} - 1). \quad (2.14)$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$G_A(z|S) = e^{\log(1 + p_A^S(z^{v_A} - 1))}. \quad (2.15)$$

Uma suposição chave nesse modelo é a que as probabilidades individuais de *default* são suficientemente pequenas de maneira que a distribuição composta² de Bernoulli

²O conceito de distribuição composta será apresentado na próxima seção

pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson. Como assumimos que os eventos de *default* possuem distribuição de Bernoulli, sendo que p_A^S é suficientemente pequena, então $p_A^S(z^{v_A} - 1)$ também será suficientemente pequeno desde que ainda seja válida a suposição adicional de que $|z| \leq 1$. Definindo $w = p_A^S(z^{v_A} - 1)$ e utilizando a expansão de Taylor da função $\ln(1 + w)$ temos:

$$\ln(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} \dots$$

Considerando w suficientemente pequeno, temos a seguinte aproximação:

$$\ln(1 + w) \approx w.$$

E, portanto, temos:

$$G_A(z|S) \approx e^{(p_A^S(z^{v_A}-1))}. \quad (2.16)$$

Temos ainda, pela expansão de Taylor da expressão $e^{[p_A^S(z^{v_A}-1)]}$, o seguinte resultado:

$$G_A(z|S) \approx \exp[p_A^S(z^{v_A} - 1)] = \exp(-p_A^S) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(p_A^S)^x}{x!} z^x,$$

onde temos a FGP de uma distribuição de Poisson com taxa p_A^S . Portanto, assumiremos como válida a aproximação de Poisson. Teremos, então que a FGP de X pela independência mútua dos devedores será

$$G_X(z|S) = \prod_{A=1}^N G_A(z|S) = \exp\left(\sum_{A=1}^N p_A^S(z^{v_A} - 1)\right). \quad (2.17)$$

Utilizando as definições em (2.3), e assumindo sem perda de generalidade que $\mathbb{E}[S_i] = 1$, para qualquer $i \in k = 1, \dots, K$ (condição natural para que $\mathbb{E}[p_A^S] = p_A$) teremos:

$$G_X(z|S) = \exp\left(\sum_{A=1}^N \sum_{k=0}^K p_A w_{Ak} S_k (z^{v_A} - 1)\right). \quad (2.18)$$

Podemos rearranjar os termos definindo:

$$\mu_k = \sum_{A=1}^N w_{Ak} p_A$$

$$\mathcal{P}_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{A=1}^N w_{Ak} p_A z^{v_A} \quad (2.19)$$

onde $\mathcal{P}_k(z)$ é chamado de polinômio setorial. Temos então

$$\begin{aligned} G_X(z|S) &= \exp \left(\sum_{k=0}^K S_k \left(\sum_{A=1}^N p_A w_{Ak} (z^{v_A} - 1) \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{k=0}^K S_k \mu_k (\mathcal{P}_k(z) - 1) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como assumimos sem perda de generalidade que $\mathbb{E}[S_i] = 1$, estimamos, pelo método dos momentos, os parâmetros da distribuição de S_k . Como $S_k \sim \text{Gama}(\alpha_k, \beta_k)$. Então temos:

$$\mathbb{E}[S_k] = \alpha_k \cdot \beta_k = 1, \quad (2.21)$$

$$\text{var}[S_k] = \alpha_k \cdot \beta_k^2 = \sigma_k^2, \quad (2.22)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\sigma_k^2}, \\ \beta_k &= \sigma_k^2. \end{aligned}$$

O modelo desenvolvido sem a inclusão de setores traz implicitamente uma forte suposição: as probabilidades de *default* são apenas variáveis de entrada no cálculo da distribuição de perda agregada e permanecem inalteradas ao longo de um período considerado (usualmente um ano), ou seja, tais probabilidades são determinísticas em tal período. Uma outra suposição nesse contexto é que os eventos de *default* entre os devedores são independentes. Essas hipóteses são flexibilizadas por meio da inclusão da análise setorial. Esse procedimento gera uma distribuição composta de Poisson onde o parâmetro p_A^S tem a distribuição assumida para os setores, no caso, Gama.

Para tal, segue-se a seguinte convolução: conhecida a distribuição f_S dos fatores de risco S_k , podemos determinar uma fórmula analítica fechada para a FGP quando tais fatores tem distribuição Gama, da seguinte maneira:

$$G_X(z) = \int G_X(z) = \int G_X(z|S = s) f_S^{(\alpha, \beta)}(s) ds. \quad (2.23)$$

Portanto, e a partir de (2.19) e (2.20), assumindo independência entre os setores, $s_0 \equiv 1$, e utilizando integração múltipla, (tendo o vetor de parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K)$), podemos chegar aos seguintes resultados:

$$G_X(z) = \int \exp\left(\sum_{k=0}^K s_k \mu_k (\mathcal{P}_k(z) - 1)\right) \prod_{l=1}^K \frac{s_l^{\alpha_l - 1} e^{-\frac{s_l}{\beta_l}}}{\beta_l^{\alpha_l} \Gamma(\alpha_l)} ds_l.$$

Como $\beta_k = \frac{1}{\alpha_k}$, temos,

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \int \exp\left(\sum_{k=0}^K s_k \mu_k (\mathcal{P}_k(z) - 1)\right) \prod_{l=1}^K \frac{s_l^{\alpha_l - 1} e^{-\alpha_l s_l} \alpha_l^{\alpha_l}}{\Gamma(\alpha_l)} ds_l \\ &= e^{\mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1)} \prod_{k=1}^K \frac{\alpha_k^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^\infty e^{s_k [\mu_k (\mathcal{P}_k(z) - 1) - \alpha_k]} s_k^{\alpha_k - 1} ds_k. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^\infty e^{-\beta \cdot x^\gamma} x^{\alpha - 1} dx = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)}{\gamma \beta^{(\alpha/\gamma)}},$$

temos

$$\begin{aligned} G_X(z) &= e^{\mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1)} \prod_{k=1}^K \frac{\alpha_k^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k)} \frac{\Gamma(\alpha_k)}{[\alpha_k - \mu_k \mathcal{P}_k(z) + \mu_k]^{\alpha_k}} \\ &= e^{\mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1)} \prod_{k=1}^K \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k - \mu_k \mathcal{P}_k(z) + \mu_k} \right)^{\alpha_k} \\ &= e^{\mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1)} \prod_{k=1}^K \left(\frac{\frac{\alpha_k}{\mu_k + \alpha_k}}{\frac{\alpha_k}{\mu_k + \alpha_k} - \frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k} \mathcal{P}_k(z) + \frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k}} \right)^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{\alpha_k}{\mu_k + \alpha_k} = 1 - \frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k}$$

e fazendo

$$\frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k} = \delta_k,$$

temos

$$G_X(z) = e^{\mu_0(\mathcal{P}_0(z)-1)} \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \right)^{\alpha_k}. \quad (2.24)$$

Observe que, não havendo risco idiossincrático, temos

$$G_X(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \right)^{\alpha_k}. \quad (2.25)$$

Ressaltamos que a distribuição binomial negativa também surge como uma mistura contínua da distribuição de Poisson composta da Gama, ou seja, podemos verificar uma binomial negativa a partir de uma distribuição de Poisson(λ) onde λ tem distribuição Gama³. Dessa forma, o resultado da perda agregada de toda a carteira de empréstimos no modelo CR+ é descrito pela soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição binomial negativa composta, como afirma Gundlach e Lehrbass [30].

Apresentamos nesta seção o uso da FGP para descrição da distribuição de perda agregada do modelo CR+. Contudo, as principais funções geradoras (FGM, FC e FGC) também lideram uma linha de pesquisa em suas aplicações ao modelo CR+. Um exemplo do uso da FGM pode ser encontrado em Giese [28], outro estudo que relaciona tanto a FGM quanto a FGC é encontrado em Gordy [29], sendo que o quarto capítulo dessa dissertação também abordará o uso dessas funções. Para uma aplicação da FC, veja Rei β [56].

2.5 Distribuições Compostas e Recursividade de Panjer

³Esse resultado pode ser verificado no apêndice A

2.5.1 Distribuições Compostas

Definição 1. *Uma distribuição composta é especificada em termos de uma outra distribuição, vinculadas entre si por um parâmetro dependente, sendo ele próprio uma variável aleatória com distribuição específica (Asmussen [6]).*

Distribuições compostas são frequentes em estudos da teoria da ruína e processos estocásticos, como podemos ver em outra definição. (Ross [58]);

Seja Y_t um processo estocástico tal que:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, t \geq 0.$$

Seja N_t também um processo estocástico e Z_t uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a.i.i.d.) com distribuição $F(\cdot)$. Além disso, sendo N_t e Z_t mutuamente independentes, temos então que Y_t é um processo composto.

Um importante processo composto na teoria da ruína é o processo composto de Poisson, caracterizado quando N_t é um processo de Poisson com parâmetro (λ) .

2.5.2 Recursividade de Panjer

Definição

Definição 2. *Seja N uma variável aleatória com valores nos inteiros não negativos e designemos $p_n = P(N = n), n = 0, 1, 2, \dots$. Esta distribuição se diz da classe (a, b) da família de distribuições compostas, onde $a, b \in \mathfrak{R}$, se:*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

As distribuições de Poisson e binomial negativa, em particular, têm sido utilizadas largamente na modelagem de perda agregada. O método usual de estimação destas distribuições envolve convoluções e distribuições condicionais, que requer um grande esforço computacional. Esse esforço pode ser reduzido significativamente por meio da recursividade de Panjer[53].

A relação recursiva entre as probabilidades que definem $p_n = P(N = n)$ é conhecida como recursividade de Panjer e verifica-se em algumas frequentes distribuições no estudo de perda agregada, em particular para a família de distribuições compostas. Apenas as seguintes distribuições satisfazem a (2.26):

- 1)Poisson de parâmetro λ , nesse caso $p_n = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ com $a = 0$ e $b = \lambda$;
- 2)Binomial com parâmetros (k, p) , com $p_n = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$ com $a = \frac{p}{1-p}$ com $b = (k+1) \cdot \frac{p}{1-p}$;
- 3)Binomial negativa⁴ de parâmetros (r, p) , com $p_n = \binom{n+r-1}{n} (1-p)^r \cdot p^n$ com $a = p$ e $b = (r-1)p$.

Algumas observações feitas em Asmussen [6] são importantes para determinar quais valores de (a, b) são válidos para o cálculo de probabilidades. Se $a + b = 0$, então $p_0 = 1$ e $p_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, e teremos uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0$. Para outros valores de a e b além dos mencionados acima, não existirá uma distribuição de probabilidade para (2.26), quando:

- $p_0 \leq 0$; como isso não é factível, $p_0 > 0$;
- $a + b < 0$, o que resultaria em $p_1 < 0$;

⁴Apresentamos no apêndice B essa relação para o caso da distribuição binomial negativa

- $a < 0$ e $b \neq a(n + 1)$ para $\forall n$, que resulta em probabilidades negativas;
- Se $a \geq 1$ e $a + b > 0$, então $np_n = ((n - 1)a + a + b)p_{n-1} > (n - 1)p_{n-1}$ de (2.26), então $p_n > \frac{p_1}{n}$, para $n = 1, 2, \dots$ e, conseqüentemente, $\sum_n p_n = \infty$.

2.6 Recursividade de Panjer no Modelo CreditRisk+

A fim de determinar a distribuição de perda agregada de uma carteira de crédito a partir da FGP $G_X(z)$ de uma maneira eficiente, foi sugerido no documento original do modelo CR+ o uso da recursividade de Panjer⁵, o que até então era de prática somente na literatura atuarial. Essa recursividade no modelo CR+ está baseada na representação da derivada de $\log G_X(z)$ como a razão entre dois polinômios $A(z), B(z)$ como será apresentado no decorrer desta seção. Tendo como referência Gundlach e Lehrbass [30] e Gordy [29], seguimos o desenvolvimento.

A partir de (2.24), temos

$$\ln G_X(z) = \mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \right). \quad (2.27)$$

Temos, então

$$\begin{aligned} (\ln G_X)'(z) &= \mu_0 \mathcal{P}'_0(z) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \frac{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)}{1 - \delta_k} \frac{1 - \delta_k}{(1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z))^2} \delta_k \mathcal{P}'_k(z) \\ &= \mu_0 \mathcal{P}'_0(z) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \delta_k \mathcal{P}'_k(z) \frac{1}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como $\delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k}$, então

$$\eta_k = \alpha_k \delta_k = \frac{\mu_k}{1 + \mu_k \beta_k}$$

já que $\alpha_k \beta_k = 1$, ou seja $\alpha_k = \frac{1}{\beta_k}$. Observando ainda que

⁵Apresentamos no apêndice C o desenvolvimento da recursividade de Panjer para um setor e probabilidade de *default* determinística, ou seja, sem a inclusão da análise de setores, conforme apresentado em Avesani [5]

$$\delta_0 = 0 \Leftrightarrow \mu_0 \mathcal{P}'_0(z) = \frac{\mu_0 \mathcal{P}'_0(z)}{1 - \delta_0 \mathcal{P}_0(z)}$$

e supondo que $\eta_0 = \mu_0$, podemos reescrever (2.28) como

$$(\ln G_X)'(z) = \eta_0 \frac{\mathcal{P}'_0(z)}{1 - \delta_0 \mathcal{P}_0(z)} + \sum_{k=1}^K \eta_k \frac{\mathcal{P}'_k(z)}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \quad (2.29)$$

$$= \sum_{k=0}^K \eta_k \frac{\mathcal{P}'_k(z)}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \quad (2.30)$$

considerando (2.30) ilustrativamente para $K = 2$, teremos,

$$\begin{aligned} (\ln G_X)'(z) &= \sum_{k=0}^2 \eta_k \frac{\mathcal{P}'_k(z)}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)} \\ &= \frac{\eta_0 \mathcal{P}'_0(z)}{1 - \underbrace{\delta_0 \mathcal{P}_0(z)}_{0, \text{ pois } \delta_0=0}} + \frac{\eta_1 \mathcal{P}'_1(z)}{1 - \delta_1 \mathcal{P}_1(z)} + \frac{\eta_2 \mathcal{P}'_2(z)}{1 - \delta_2 \mathcal{P}_2(z)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\ln G_X)'(z) = \frac{\eta_0 \mathcal{P}'_0(z) [(1 - \delta_1 \mathcal{P}_1(z))(1 - \delta_2 \mathcal{P}'_2(z))] + \eta_1 \mathcal{P}'_1(z) (1 - \delta_2 \mathcal{P}_2(z)) + \eta_2 \mathcal{P}'_2(z) (1 - \delta_1 \mathcal{P}_1(z))}{(1 - \delta_1 \mathcal{P}_1(z))(1 - \delta_2 \mathcal{P}'_2(z))}.$$

Generalizando esse procedimento para um K qualquer, temos que a ideia fundamental da recursividade de Panjer é reescrever (2.28) como

$$(\ln G_X)'(z) = \frac{\sum_{k=0}^K \eta_k \mathcal{P}'_k(z) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^K (1 - \delta_j \mathcal{P}_j(z))}{\prod_{l=0}^K (1 - \delta_l \mathcal{P}_l(z))} = \frac{A(z)}{B(z)}. \quad (2.31)$$

Ou seja,

$$(\ln G_X)'(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{d_A} a_j z^j}{\sum_{j=0}^{d_B} b_j z^j} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{d_A} z^{d_A}}{b_0 + b_1 z + \dots + b_{d_B} z^{d_B}}. \quad (2.32)$$

Os graus desses polinômios podem ser determinados da seguinte forma:

$$d_B = \sum_{k=0}^K \sum_{A=1}^N [v_A]_k \quad (2.33)$$

$$d_A = \left(\sum_{k=0}^K \sum_{A=1}^N [v_A]_k \right) - 1 \quad (2.34)$$

onde $[v_A]_k$ representa $v_A \in k$.

Podemos calcular os coeficientes a_n e b_n por meio da diferenciação

$$a_n = \frac{1}{n!} A^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n A(z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad (2.35)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} B^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n B(z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad (2.36)$$

com a ajuda da regra de Leibniz:

$$\frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^K h_k \right)^{(n)} = \sum_{n_1 + \dots + n_K = n} \prod_{k=0}^K \frac{h_k^{n_k}}{n_k!}$$

para qualquer função diferenciável h_k .

Observe ainda que temos, da mesma forma,

$$\mathbb{P}(X = n) = g_n = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0). \quad (2.37)$$

Analisaremos, agora, o polinômio setorial e suas derivadas para termos todos os elementos de cálculo de a_n e b_n . Temos, por definição,

$$\mathcal{P}_k(0) = 0,$$

$$\mathcal{P}_k^{(n)}(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{A: v_A \geq n} w_{Ak} p_A v_A (v_A - 1) \dots (v_A - n + 1) z^{v_A - n}, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{P}_k^{(n)}(0) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{A: v_A = n} w_{Ak} p_A n!. \quad (2.39)$$

Definindo

$$\mu_{n,k} = \sum_{A:v_A=n} w_{Ak} \mathcal{P}_A$$

temos

$$\mathcal{P}_k^{(n)}(0) = \frac{\mu_{n,k} n!}{\mu_k}.$$

Para calcularmos o coeficiente b_n é necessário, ainda, definirmos

$$\mathbb{I}_{(n_k)} = \begin{cases} 1, & \text{caso, } n_k = \sum_{i=1}^L v_{Ai} \text{ para qualquer combinação de } v'_A \text{ s que resulte em } n_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde L assume valores de 1 a um $L_{máximo}$ que representa o número máximo de combinações de valores de v_A .

Definindo ainda,

$$\mathbb{I}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso, } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o que torna possível, portanto, o cálculo do coeficiente b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=1}^K (1 - \delta_k \mathcal{P}_k(z)) \right)^{(n)} \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_K = n} \prod_{k=0}^K \left(\mathbb{I}_{0n_k} - \mathbb{I}_{(n_k)} \delta_k \frac{\mathcal{P}_k^{(n_k)}(z)}{n_k!} \right) (0) \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_K = n} \prod_{k=0}^K \left(\mathbb{I}_{0n_k} - \mathbb{I}_{(n_k)} \frac{\delta_k \mu_{n_k,k}}{\mu_k} \right). \end{aligned}$$

(2.41)

Analogamente, calculamos o coeficiente a_n :

$$a_n = \sum_{k=0}^K \sum_{n_1 + \dots + n_K = n} \frac{\eta_k \mu_{n_k+1,k}}{\mu_k} (n_k + 1) \mathbb{I}_{(n_k+1)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^K \left(\mathbb{I}_{0n_j} - \frac{\delta_j \mu_{n_j,j}}{\mu_j} \right). \quad (2.42)$$

Para determinar a distribuição de perda agregada de maneira recursiva é necessário observar a seguinte relação da derivada da função \ln :

$$\begin{aligned} (\ln G_X)' &= \frac{G'_X(z)}{G_X(z)} \Leftrightarrow G'_X(z) = G_X(z)((\ln G_X)'(z)) = G_X(z) \frac{A(z)}{B(z)}, \\ (\ln G_X)''(z) &= G'_X(z) \frac{A(z)}{B(z)} + G_X(z) \frac{[A'(z)B(z) - B'(z)A(z)]}{B^2(z)}. \end{aligned}$$

Como

$$G'_X(z) = G_X(z) \frac{A(z)}{B(z)} \Leftrightarrow G_X(z) = G'_X(z) \frac{B(z)}{A(z)},$$

temos então

$$G''_X(z) = \frac{1}{B(z)} [G_X(z)A'(z) + G'_X(z)(A(z) - B'(z))].$$

Generalizando, teremos, conforme Gundalch e Lehrbass [30]:

$$\begin{aligned} G_X^{(n)}(z) &= \frac{1}{B(z)} \left[G_X(z)A^{(n-1)}(z) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{n-1} G_X^{(j)}(z) \left[\binom{n-1}{j} A^{(n-1-j)}(z) - \binom{n-1}{n-j} B^{(n-j)}(z) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Calcula-se dois passos iniciais para a utilização da recursividade, g_0 e g_1 ;

$$\begin{aligned} g_0 &= G_X(0) = e^{\ln G_X(0)} = \exp \left(\mu_0(\mathcal{P}_0(z) - 1) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(0)} \right) \right) \\ &= e^{-\mu_0} \prod_{k=1}^K (1 - \delta_k)^{\alpha_k}, \\ g_1 &= G'_X(0) = g_0 \frac{a_0}{b_0}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Considerando (2.35), (2.36) e (2.37) as relações

$$\begin{aligned} A^{(n)}(0) &= n!a_n \Rightarrow A^{(n-1)}(0) = (n-1)!a_{n-1} \\ &\Rightarrow A^{(n-1-j)}(0) = (n-1-j)!a_{n-1-j} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B^{(n)}(0) &= n!b_n \Rightarrow B^{(n-j)}(0) = (n-j)!b_{(n-j)} \\ &\Rightarrow B^{(0)}(0) = b_0! \end{aligned}$$

e concluindo, ainda, que

$$G_X^{(n)}(0) = n!g_n \Rightarrow G_X^{(0)}(0) = g_0!.$$

substituímos essas relações em (2.43) e teremos, para $n \geq 1$,

$$g_n = \frac{1}{n!}G_X^{(n)}(0),$$

$$g_n = \frac{1}{n!b_0} \left[g_0(n-1)!a_{n-1} + \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n-1} j!g_j \left[\binom{n-1}{j} (n-1-j)!a_{n-1-j} - \binom{n-1}{n-j} (n-j)!b_{n-j} \right] \right] \quad (2.45)$$

Observe agora que, utilizando (2.38) e (2.39), temos que a n -ésima derivada de $B(z)$ e $A(z)$ não podem ser superiores a, respectivamente, d_B para o polinômio $B(z)$, e d_A para o polinômio $A(z)$, pois dessa forma será a derivada de uma constante e o valor da expressão será zero. Da mesma forma, se os graus dos polinômios forem maiores que o grau da n -ésima derivada em $z = 0$, isto fará com que o valor da expressão também seja zero. Por esta razão temos, em (2.39), $A : v_A = n$. Dessa forma, podemos reajustar abrindo o somatório nas parcelas multiplicativas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } n > v_A \Rightarrow \mathcal{P}_k^{(n)}(z) = 0 \\ \text{se } n < v_A \Rightarrow \mathcal{P}_k^{(n)}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\mathcal{P}_k^{(n)}(z) \Big|_{z=0} = \begin{cases} \frac{\mu_{n,k} n!}{\mu_k} & \text{para } v_A = n \\ 0 & \text{para } v_A \neq n \end{cases}$$

Como em (2.45) estamos calculando derivadas de ordem 1 até $n - 1$, e sendo d_A o maior grau do polinômio $A(z)$, então $n - 1 = d_A \Leftrightarrow n - d_A = 1$, o que permite reajustar $\sum_{j=1}^{n-1}$ como $\sum_{j=\max\{1, n-d_A\}}^{n-1}$. Como no polinômio $B(z)$ não há o termo $\mathcal{P}_0(z)$, pois $\delta_0 = 0$, teremos que $n - 1 = 1 + d_B \Leftrightarrow n - 1 - d_B = 1$, o que também permite reajustar o somatório como $\sum_{j=\max\{1, n-1-d_B\}}^{n-1}$. Abrindo o somatório, teremos então

$$g_n = \frac{1}{n!b_0} \left[g_0(n-1)!a_{n-1} + \sum_{j=\max\{1, n-d_A\}}^{n-1} g_j \frac{(n-1)!j!(n-1-j)!}{j!(n-1-j)!} a_{n-1-j} - \sum_{j=\max\{1, n-1-d_B\}}^{n-1} g_j \frac{j!(n-1)!(n-j)!}{(n-j)!(n-1-n+j)!} b_{n-j} \right]$$

$$g_n = \frac{1}{n!b_0} \left[g_0(n-1)!a_{n-1} + \sum_{j=\max\{1, n-d_A\}}^{n-1} g_j(n-1)!a_{n-1-j} - \sum_{j=\max\{1, n-1-d_B\}}^{n-1} g_j j(n-1)!b_{n-j} \right].$$

Fazendo $k = n - j$ e utilizando $n! = n(n-1)!$:

$$g_n = \frac{1}{nb_0} \left(g_0 a_{n-1} + \sum_{k=1}^{\min\{d_A, n-1\}} g_{n-k} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{\min\{d_B, n-1\}} (n-k) g_{n-k} b_k \right).$$

Efetuada as seguintes mudanças: $n = n+1$, $k = j+1$ e $n+1 = k-1 \Leftrightarrow j = n-1$ temos, por fim

$$g_{n+1} = \frac{1}{(n+1)b_0} \left(\sum_{j=0}^{\min\{d_A, n\}} a_j g_{n-j} - \sum_{j=0}^{\min\{d_B, n\}-1} (n-j) b_{j+1} g_{n-j} \right). \quad (2.46)$$

A equação (2.46) define a distribuição de probabilidade da perda agregada total da carteira de crédito quando: as probabilidades de *default* são aleatórias, os fatores que determinam as probabilidades de *default* são mutuamente independentes e com distribuição Gama, e os eventos de *default* são mutuamente independentes condicionalmente a tais fatores.

Este algoritmo é implementado de forma a calcular a distribuição de perda agregada de maneira recursiva até que um determinado j^* , onde $G(j^*) = g_0 + g_1 + \dots + g_{j^*}$, possa atingir um percentil de solvência admitido (entre o percentil 95% e 99,9%) ou até um número máximo de iterações (maior ou menor que o grau máximo do polinômio, em geral maior); caso contrário, o motor de cálculo pode permanecer indefinidamente utilizando a recursividade para calcular uma distribuição acumulada de probabilidade de maneira infinitesimal próxima de um.

Capítulo 3

Fragilidades e Alternativas na Implementação do Modelo CreditRisk+

3.1 Introdução

Nesse capítulo abordaremos questões fundamentais da implementação do modelo CreditRisk+ na estimação da distribuição de perda agregada. Em cada seção apresentaremos uma fragilidade, computacional ou teórica, e as alternativas apresentadas na literatura para seu tratamento (quando houver), além dos exercícios computacionais que evidenciarão a fragilidade em questão ou serão propostas de ajuste, todos com resultados apresentados no quinto capítulo.

Na seção 3.2, apresentaremos os impactos de altos valores de PD quando considerada a aproximação logarítmica da distribuição de Poisson para os eventos de *default*. Na seção 3.3 evidenciaremos o impacto sobre a distribuição de perda agregada da escolha do número de faixas de exposição. Na seção 3.4, abordaremos as questões relacionadas a amplitude das faixas que afeta a distribuição de clientes por faixas, em especial quando as exposições são excessivamente heterogêneas. Na seção 3.5, será tratada a questão da determinação da volatilidade da taxa de *default*. Apresentaremos os estudos e alternativas propostas na literatura. Por fim, na seção 3.6 apresentaremos

a relevante questão da propagação de erros no algoritmo recursivo de Panjer, e o cálculo de probabilidades acima da perda máxima de carteira serão detalhados, sendo o resultado final a indicação de um método mais eficiente computacionalmente e mais preciso.

3.2 Aproximação Logarítmica da Distribuição de Poisson

Como foi apresentado na seção 2.4, uma das suposições chave no modelo CR+ é que as probabilidades individuais de *default* são suficientemente pequenas de maneira que a distribuição composta de Bernoulli pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson. Essa aproximação é feita por meio das propriedades da função logarítmica $\ln(1 + w)$ quando analisada sua expansão em série de Taylor. Essa aproximação é determinante para todos os demais desenvolvimentos teóricos do modelo CR+, pois por ela define-se:

$$G_A(z|S) = e^{\log(1+p_A^S(z^{v_A}-1))} \approx e^{(p_A^S(z^{v_A}-1))}.$$

Tal aproximação define, portanto, a PGF de cada devedor e por conseguinte a PGF de toda carteira sob a suposição de independência condicional dos devedores. Na aplicação a dados reais essa aproximação deve ser cuidadosamente verificada, pois é potencialmente comprometedora aos resultados da distribuição de perda agregada. Na aplicação prática do modelo CR+, a PD em geral é resultado de algum procedimento de estimação como detalhado na seção 1.2. Esses valores estimados, por exemplo, por meio de um modelo de regressão logística não possuem uma restrição a essa suposição. Dessa forma, a aplicação a dados reais, do modelo deve atentar para a distribuição dos valores da PD e verificar até que ponto a aproximação pode ser válida.

Apresentamos na Figura 3.1, uma simulação com a finalidade de verificar o comportamento dessa aproximação, produzida de modo a garantir oito dígitos de precisão e escolhidos alguns valores para análise, temos:

p_A	$\ln(1+p_A)$
0,01	0,01
0,02	0,02
0,03	0,03
0,04	0,04
0,05	0,05
0,06	0,06
0,07	0,07
0,08	0,08
0,09	0,09
0,10	0,10
0,20	0,18
0,30	0,26
0,40	0,34
0,50	0,41
0,60	0,47
0,70	0,53
0,80	0,59
0,90	0,64

Figura 3.1: Aproximação Logarítmica da Distribuição de Poisson

Observamos que a aproximação é válida para valores abaixo de 0,09, ou seja clientes de uma carteira de crédito com PD acima desse valor podem acumular erros na estimação da distribuição de perda agregada via modelo CR+. Para analisar os impactos de PDs de altos valores na estimação da distribuição de perda agregada, um exercício proposto é separar clientes que possuam PD acima desse limite (0,09) e compará-lo ao modelo com o conjunto total de clientes. Deve-se considerar também a severidade em termos de EXL dessa comparação.

Uma alternativa às distorções causadas por essa aproximação seria a de considerar os clientes com PD acima de 0,09 como clientes inadimplentes, mesmo que não tenham sido considerados em inadimplência por um determinado conceito de *default*, como por exemplo a data de *default*, e dessa forma gerar para os mesmos provisão de recursos no valor de suas EBs dadas como perdas determinísticas. Essa também é a alternativa orientada em Schechtman *et al.*[59]; contudo, o estudo sugere um limite de PD de 0,15.

3.3 Número de Faixas de Exposição e Impactos na Distribuição de Perda Agregada

Como foi apresentado em 2.2, é prática comum na implementação computacional de modelos de perda agregada, em particular nos modelos atuariais, como o caso do modelo CreditRisk+, a discretização dos valores contínuos de exposições individuais com a finalidade de agrupamento em faixas dessas exposições (bandas). Esse procedimento passa primeiramente pela escolha da quantidade de faixas desejadas e posteriormente pela determinação da amplitude de cada faixa, como observado na sequência:

- 1) Decide-se de maneira *ad hoc* o número total de faixas de exposição, B ;
- 2) Determina-se a amplitude (*range*) de cada faixa:

$$U = \frac{\max[v_A]}{B} \quad (3.1)$$

- 3) Ajusta-se a exposição individual de todos os devedores da carteira:

$$v_A = \left\lceil \frac{v_A}{U} \right\rceil$$

Esse procedimento limita o número de possíveis valores de perda agregada e, portanto, reduz o tempo de processamento de sua distribuição de probabilidade. Porém, gera um *tradeoff* entre velocidade de processamento e acurácia. Esse *tradeoff* pode ser detalhado como:

- 1) Um número de faixas muito grande (e no caso extremo igual a v_A) pode tornar o modelo computacionalmente impraticável com convergência do algoritmo de recursividade de Panjer comprometida ou ainda a estimação de um número de *defaults* acima da quantidade de clientes da carteira;
- 2) Um número muito pequeno de faixas pode distorcer significativamente a distribuição de perda agregada, gerando uma estimativa de eventos de *default* irrealistas para a realidade de uma carteira de crédito.

Um exercício proposto para evidenciar os efeitos do número de faixas sobre a distribuição de perda agregada pode considerar um número de faixas de referência

como 100 faixas (esse será o número de faixas padrão para todos os demais exercícios, quando não mencionado) e calcular com a mesma base de clientes um quarto do número de faixas padrão, e com três vezes o número de faixas padrão.

Portanto os impactos sobre a distribuição de perda agregada proposta para esses exercícios poderiam ser simulados tanto acima de 300 faixas quanto abaixo de 25 faixas. Contudo, tais valores não comprometem a convergência do algoritmo e atendem os objetivos de evidenciar o impacto. Uma alternativa para a escolha *ad hoc* do número de faixas será apresentada na próxima seção em conjunto com a questão da distribuição de clientes por faixa.

3.4 Carteiras de Crédito com Exposições Heterogêneas

Como apresentado em (3.1) a amplitude de cada faixa de exposição considera a máxima exposição individual da carteira. Tal definição determina, portanto, a distribuição de clientes por faixa. Em situações nas quais a exposição da carteira é relativamente homogênea, essa distribuição de clientes ocorrerá com uma concentração de clientes em torno da média. Contudo, em uma carteira em que essas exposições sejam heterogêneas, ou ainda com clientes com exposição de valores discrepantes, pode ser gerado uma grande concentração de clientes em uma única faixa de exposição.

Essa concentração em uma única faixa poderá gerar distorções à medida em que o $\max[\tilde{v}_A]$ seja de fato um *outlier*, fazendo com que a amplitude das faixas seja um intervalo tão amplo de valores que não represente mais a exposição média dos clientes em uma determinada faixa (primeira faixa, por exemplo). Essa é uma situação comum na qual temos clientes PF e PJ em uma mesma carteira (ou em um modelo onde exista apenas um setor com clientes PF e PJ). A título de ilustração, considere a discretização de duas carteiras como mostra a Figura 3.2.

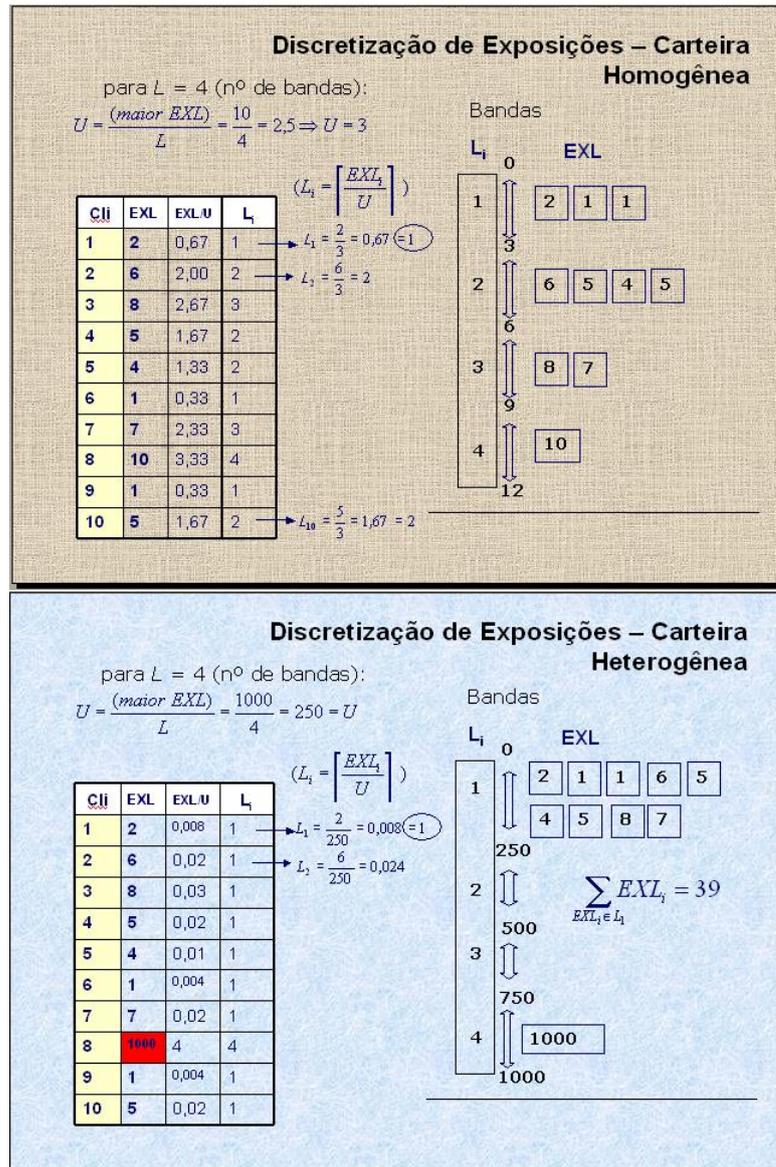


Figura 3.2: Comparativo de Carteiras com Diferentes Exposições

Na carteira homogênea, os clientes distribuem-se em todas as faixas; contudo, na carteira heterogênea, a presença de uma exposição discrepante faz com que todos os demais clientes concentrem-se na primeira faixa. A concentração na primeira faixa pode gerar distorções na distribuição de perda agregada, pois um evento de *default* na primeira faixa resultaria em uma perda monetária acima do somatório da exposição líquida de todos os clientes dentro desta faixa, no exemplo apresentado acima. Dessa maneira, independentemente da probabilidade associada aos clientes dentro desta primeira faixa, perdas desta magnitude não podem ocorrer.

Em aplicações reais é comum a presença de clientes PF e PJ analisados em con-

junto, ainda que na média a exposição (seja a EB ou EXL) de PJ seja consideravelmente superior a exposição de clientes PF. Vale também a ressalva de que na prática existem clientes PF que se configuram como exceções na carteira e apresentam exposições individuais equivalentes em média a exposições PJ. Essa fragilidade não depende da quantidade de setores, pois a definição de setores não altera o processo de discretização das exposições individuais. Dessa forma, não é incomum em aplicações reais do modelo CR+ situações de carteiras com exposições heterogêneas.

Uma alternativa sugerida nesse estudo para contornar essa fragilidade seria alterar o *range* ($U = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{B}$) de modo que ainda considere a máxima exposição, pois é necessário para determinar o limite de derivação na fórmula recursiva como apresentado em (2.45), com o intuito de que tal alteração torne a amplitude das faixas, mais representativa para distribuição de clientes por faixa. Para tanto, diferente do que sugere o modelo original, a escolha da quantidade de faixas deixa de ser *ad hoc*, sendo escolhida de forma que a razão $\frac{\max[\tilde{v}_A]}{B}$ passe a representar: algum momento de ordem central, a média, a mediana, o intervalo interquartil, o primeiro quartil, entre outros. Para tanto, teremos um valor modificado de U e B ;

$$U_{Modificado} = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{B}$$

onde $U_{Modificado}$ = média, mediana, primeiro quartil, etc. Desta forma, o número de faixas será determinado pela medida escolhida para adequar a amplitude da faixa de maneira mais representativa (na prática, tal procedimento aumenta o número de faixas):

$$B_{Modificado} = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{U_{Modificado}}.$$

Com a amplitude da faixa sendo dado então por

$$U = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{B_{Modificado}},$$

tendo, portanto, o número de faixas $B_{Modificado}$ necessário para gerar uma amplitude de faixa dimensionada por alguma das medidas citadas anteriormente. A ideia é determinar a menor amplitude de faixa possível sem comprometer a eficiência computacional e a convergência do algoritmo recursivo de Panjer. O exemplo de carteira

heterogênea teria, por exemplo, as seguintes possibilidades de distribuição de clientes por faixa:

Distribuição de Exposições - Carteira Heterogênea - Alternativas

Cli	EXL	L _{Mediana}	L _{1ºQuartil}	L _{4Faixas}
1	2	1	1	1
2	6	2	2	1
3	8	2	3	1
4	5	1	2	1
5	4	1	1	1
6	1	1	1	1
7	7	2	2	1
8	100	200	400	4
9	1	1	1	1
10	5	1	2	1
B - Nº Faixas		200	400	4
U - Range		5	2,5	250

Média	103,9
Mediana	5
Var	99140,99
DP	314,87
1Q	2,5

Figura 3.3: Exemplo de Possibilidades para Tratamento de Carteiras Heterogêneas

Para isso, uma pré-avaliação da distribuição dos valores de EXL pode indicar qual dessas medidas pode ser utilizada, considerando também o número máximo de iterações (n_{it}). Contudo, esta solução pode não apresentar resultados convergentes com o algoritmo de Panjer, pois a exposição individual máxima discretizada por U torna-se o grau máximo do polinômio a ser calculado. Aumentando-se o número de faixas de exposição, reduz-se a amplitude da faixa (ou seja, reduz-se o valor de U) aumenta-se o grau do polinômio, e, dessa forma, os clientes que antes estavam concentrados na primeira faixa, agora de melhor forma distribuídos nas faixas, passam a gerar uma maior necessidade de interações para se atingir os mesmos percentis assumidos como limite, portanto demandando uma exigência computacional maior.

Em alguns casos tal exigência pode não apresentar convergência computacional pelo algoritmo de Panjer, pois o número de interações exigida para alguma medida em particular pode exigir um tempo computacional impraticável ou insuficiência de memória. Além dessa questão, existe a propagação de erros numéricos na medida em que $v_A \sim \tilde{v}_A$, e esta será uma questão abordada na seção 3.6.

Uma alternativa que não pode ser aplicada seria o cálculo individualizado de cada tipo de cliente, ou seja, a estimação separadamente da distribuição de perda

agregada para clientes PF e PJ, por exemplo, pois como demonstrado em Artzner *et al.*[4], o $V@R$ é uma medida de risco que pode não apresentar a propriedade de sub-aditividade, ou seja;

$$V@R_q(u) + V@R_q(v) < V@R_q(u + v)$$

3.5 Determinação da Volatilidade da Taxa de *Default*

Uma questão chave na estimação da perda agregada no modelo CR+ diz respeito ao parâmetro σ_k^2 em (2.22). Este parâmetro é conhecido na literatura como a volatilidade da taxa de *default* e reflete a sensibilidade a vários fatores, entre eles, fatores econômicos que afetam de maneiras diferentes e simultânea a capacidade de pagamento, e portanto a PD, dos devedores de toda uma carteira ou ainda de um setor em particular no horizonte de tempo equivalente ao da PD (em geral um ano) (Balzarotti *et al.*[7,8]). Este parâmetro insere no modelo CR+ a incerteza associada às oscilações da PD dentro de um setor e dentro de um determinado horizonte temporal. Formalmente, encontramos em Kluge e Lehrbass [39] que, se a hipótese simplificadora de $\mathbb{E}[S_i] = 1$, $i = 1, \dots, K$ for considerada, como $\mathbb{E}[S_k] = \mu_k$, teremos então que a volatilidade da taxa de *default* será:

$$\sigma_A^2 = p_A^2 \sum_{k=1}^K w_{Ak} \frac{\sigma_k^2}{\mu_k^2}. \quad (3.2)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_k] &= \alpha_k \cdot \beta_k = \mu_k, \\ Var[S_k] &= \alpha_k \cdot \beta_k^2 = \sigma_k^2. \end{aligned}$$

Daí temos:

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \text{ e} \quad (3.3)$$

$$\beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}. \quad (3.4)$$

Se σ_k^2 , $k = 1, \dots, K$, for estimado diretamente, (3.2) oferece diretamente uma regra para derivarmos σ_A^2 . No caso onde σ_A^2 é dado, as estimativas de σ_k^2 devem (pelo menos aproximadamente) ser consistentes com (3.2). Idealmente, (3.2) precisa ser satisfeita para cada devedor $A = 1, \dots, N$, o que equivale ao sistema de equações

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & \cdots & c_{NK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_K^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{com } c_{Ak} = \frac{p_A^2 w_{Ak}^2}{\mu_k^2} \geq 0, \sigma_k^2 \geq 0 \text{ e } \sigma_A^2 > 0.$$

Como N (o número de devedores) é tipicamente maior que K (número de setores, ou fatores de risco), o sistema (3.5) em geral não tem solução. O que de melhor pode ser feito do ponto de vista matemático é a escolha de um vetor $z = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2)^T$ que seja uma imagem sobre $C = (c_{Ak})_{A,k}$ minimizando a distância Euclidiana de $b = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)^T$, isto é, Cz deve ser uma projeção linear de b na imagem de C . Como o *rank* de C não é completo, o vetor z não é único.

Na prática, estimativas anuais (como é feito para estimativas de PD) dessa volatilidade com uma base de dados de poucos anos é uma tarefa próxima do impossível, como afirmam Balzarotti *et al.*[7,8] e Schechtman *et al.*[59]. No documento original do modelo CR+, existem duas sugestões: a primeira assume $\mathbb{E}[S_k] = 1, \forall k$, sendo a estimativa para a volatilidade de *default* dada por

$$\sigma_A^2 = p_A^2 \sum_{k=1}^K w_{Ak}^2 \underbrace{\frac{\sigma_k^2}{\mu_k^2}}_1 \Leftrightarrow \sigma_k^2 = \mu_k^2$$

Contudo, o método mais utilizado para o tratamento da volatilidade da taxa de *default* segue os resultados dos estudos de Balzarotti *et al.*[7,8], que sugerem que essa

relação seja linear em relação a PD, por exemplo de 0,5¹ do valor da PD (muito embora tenha também sido ajustado o modelo com o valor de 0,3 da PD) para o caso da Argentina. O mesmo valor de volatilidade é utilizado no estudo de Gordy [29], ou seja,

$$\sigma_k^2 = \sum_{A=1}^N w_{Ak} \sigma_A = \sum_{A=1}^N w_{Ak} (p_A \times \nu),$$

onde ν representa o valor hipotético da volatilidade da taxa de *default*.

Nos estudos de Schechtman et al.[56]. utiliza-se diferentes valores de volatilidades em busca de analisar em um conjunto de 28 bancos brasileiros o comportamento do V@R estimado pelo modelo CR+ e o CER. Nesse estudo, com uma volatilidade de 0,9, o V@R de todos os bancos apresentavam valores próximos e abaixo dos valores de CER. Acima de 0,9, alguns bancos começam a apresentar valores de V@R estimados por meio do CR+ acima do CER. A partir dessas simulações foi implementada uma regressão linear sem intercepto entre V@R gerado pelo modelo CR+ e CER, sendo que o resultado indicava que a volatilidade de 110% sugeria o melhor ajuste.

Como já mencionado no segundo capítulo, estima-se os valores de (2.21) e (2.22) por meio do método dos momentos. Uma alternativa para estimação desses parâmetros é o método da máxima verossimilhança².

Dessa forma, a literatura apresenta vários valores em diferentes situações de estudo para a volatilidade da taxa de *default*. Contudo, nenhum desses estudos trata uma base de dados de uma carteira real. Quaisquer suposições sobre a volatilidade da taxa de *default* devem ser testadas para essa condição real. Para tanto, apresentaremos no sexto capítulo resultados que analisam as diferentes sugestões da literatura, além da estimação dos parâmetros da distribuição Gama dos setores por meio do método de máxima verossimilhança para uma situação real de uma carteira de crédito.

¹Sob essa hipótese, teremos para análise de um setor e sem risco idiossincrático $\sigma_A^2 = \frac{p_A}{2}$ com $\alpha_k = 4$, podendo a volatilidade ser interpretado como a variância da PD individual, nesse caso 50% da PD. Esse valor é a segunda sugestão proposta por CSFP[21].

²O método detalhado será apresentado no apêndice D

3.6 Instabilidade Numérica do Algoritmo Recursivo de Panjer

O algoritmo de recursividade de Panjer é numericamente instável, conforme Haaf *et al.*[32]. A recursividade de Panjer é obtida por meio da derivação do log da razão de dois polinômios, $\frac{A(z)}{B(z)}$. A instabilidade numérica surge no algoritmo pela soma de números de magnitude similar mas de sinais opostos (coeficientes a_n e b_n). A acurácia numérica é perdida na convolução polinomial pela necessidade de simplificação da soma da razão desses polinômios no lado direito da fórmula (2.45), ou seja, esses erros surgem de arredondamentos induzidos pelo cancelamento via subtração e soma de parcela de valor equivalente. Essa é a maior fonte de erro numérico na implementação computacional de algoritmos de cálculos recursivos, como afirma Press *et al.* [52].

Como foi demonstrado no segundo capítulo, a expansão da FGP $G(z)$ como $g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots$ é feita por meio da fórmula recursiva (2.45), onde temos a_n e b_n como os coeficientes de $A(z)$ e $B(z)$ respectivamente. O algoritmo recursivo derivado de (2.45) segue o processamento de cálculo até um determinado número de unidades discretizadas de perdas j^* ou até um número máximo de iterações pré-estabelecido, ou seja, em geral o processamento de cálculo segue até $G(j^*) = g_0 + g_1 + \dots + g_{j^*}$ atingir uma meta de solvência assumida pelo banco (entre o percentil 95% e 99,9%), como já mencionado. O j^* é atingido após algumas centenas ou milhões de iterações. A cada iteração, um erro de arredondamento é acumulado, inicialmente pequeno, contudo na medida em que se aproxima da cauda da distribuição, onde g_j é pequeno e decai vagarosamente, e onde as questões relacionadas a erros numéricos tornam-se especialmente significativas, algumas probabilidades na cauda da distribuição podem apresentar valores negativos (Gordy [29]).

O erro numérico potencial aumenta à medida que:

- 1)A assimetria da distribuição da EXL (no modelo, \tilde{v}_A) aumenta;
- 2)A discretização individual da EXL tende ao verdadeiro valor de exposição individual ($v_A \sim \tilde{v}_A$).

Outra fonte de erro numérico do algoritmo de recursividade de Panjer está rela-

cionado à variável indicadora utilizada no cálculo dos coeficientes a_n e b_n :

$$\mathbb{I}_{(n_k)} = \begin{cases} 1, & \text{caso, } n_k = \sum_{i=1}^L v_{Ai} \text{ para qualquer combinação de } v'_A \text{ que resulte em } n_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde L assume valores de 1 a um $L_{máximo}$ que representa o número máximo de combinações de valores de v_A .

Desde que existam as primeiras derivadas (que corresponderão às primeiras unidades discretizadas de perda, v_A) todas as demais poderão decorrer de uma combinação. Portanto, na implementação computacional do algoritmo, é comum determinar um j^* ou um número de iterações (n_{it}) que seja o limite para o cálculo de $G(z)$. Contudo, o estabelecimento desse limite em geral não está associado à perda máxima da carteira, definida como:

$$r_{G(z)} = \sum_{k=0}^K \sum_{A=1}^N v_{Ak}$$

Pode ocorrer em casos onde o n_{it} necessário para o cálculo de algum nível de solvência seja $n_{it} \geq r_{G(z)}$, ocasionando o cálculo de probabilidades acima de $r_{G(z)}$ ³.

A melhor alternativa para as questões numéricas apresentadas nesta seção, como também para as questões apresentadas nas seções 3.3 e 3.4, e que ainda supera as limitações de tempo de processamento e n_{it} , está relacionada ao cálculo dos percentis desejados com o método conhecido como aproximações ponto de sela, utilizando os momentos da distribuição de perda agregada para essa finalidade. Esse método contudo não representa uma solução definitiva as fragilidades do modelo CR+, pois em situações de extrema heterogeneidade das exposições da carteira, o método falha (Annaert *et. al.* [1]). Essa alternativa será tema do próximo capítulo.

³Essa questão numérica pode ser observada com mais detalhe no exemplo com quatro clientes apresentado no capítulo 5, onde são apresentados cálculos feitos manualmente em comparação com cálculos feitos computacionalmente

Capítulo 4

Aproximações Ponto de Sela: Cálculo do V@R Utilizando os Primeiros Momentos no Modelo CreditRisk+

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos uma alternativa ao método de estimação da distribuição de perda agregada via recursividade de Panjer no modelo CR+. Essa alternativa é conhecida na literatura estatística como aproximações ponto de sela, que estima por meio dos momentos da distribuição de perda agregada os percentis desejados. Diferentemente do modelo CR+ original, o tempo de solução por esse método independe do número de setores, da quantidade de devedores da carteira ou do processo de discretização das exposições, e, ainda mais importante, nesse método não há instabilidades numéricas tais como apresentados na seção 3.6.

Na seção 4.2, apresentaremos uma referência histórica da utilização deste método assim como uma introdução informal do método. Na seção 4.3, apresentamos a aplicação do método aproximações ponto de sela para o modelo CR+. Na seção 4.4, detalhamos um importante aspecto do comportamento de cauda na distribuição de perda agregada do modelo CR+ que será utilizado para verificação dos resultados

gerados pela recursividade de Panjer.

4.2 Introdução ao Método Aproximações Ponto de Sela

Em muitas situações que ocorrem em estatística, a distribuição de uma variável aleatória X surge de uma função de outra variável aleatória, ou de algum teste estatístico ou da estimação de um parâmetro, que é desconhecido ou intratável algebricamente. Relembrando o Teorema Central do Limite, se X pode ser representado como a soma de n (usualmente independentes) variáveis aleatórias com variância finita, então, à medida que n cresce, a distribuição normal é uma candidata válida para aproximarmos a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição. A aproximação normal tende a ser adequada próxima da média de X , mas tipicamente falha na medida em que nos movemos em direção à cauda da distribuição.

Para essas situações foram desenvolvidos nos anos da década de 30 o método de aproximação ponto de sela. Seu total desenvolvimento e provas assintóticas foram apresentadas nos anos 80. Essa técnica não é tão difundida, segundo Gordy [29], por exigir uma forma tratável da FGC, o que em muitos casos não é aplicável para o caso da distribuição de interesse. Todavia, existem esforços na aplicação desse método em estudos na área de risco. Feuerverger e Wong [27] utilizam o método aproximações ponto de sela para estimar o V@R para o risco de mercado, utilizando uma aproximação para FGC. Martin *et al.* [44] desenvolveram um modelo simples para risco de crédito que pode ser tratado via aproximações ponto de sela.

Muitos dos resultados apresentados nessa seção não serão formalmente provados, todavia, uma análise mais profunda do tema pode seguir a seguinte literatura (a literatura empregada no presente estudo): Barndorff-Nielsen e Cox [9], Butler [20], Daniels [23], Jensen [35], Lugannani e Rice [42] e Wood *et al.* [62].

A ideia básica desse método é superar a inadequação da aproximação normal na cauda da distribuição da variável aleatória em questão. Seja X uma variável aleatória com função densidade ou função de probabilidade f_X e FGM $M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$ existindo para uma vizinha U em torno de zero. Temos, de (2.11)(ou seja, a

CGF), que a média e a variância de X são dadas por $\mathbb{K}'_X(0)$ e $\mathbb{K}''_X(0)$, respectivamente. Temos ainda, por (2.11), que $\mathbb{K}_X(s) = \ln M_X(s)$, para $s \in U$. Se T_s é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f_{T_s}(x; s) = \frac{e^{xs} f_X(x)}{M_X(s)} \quad (4.1)$$

para algum $s \in U$, então T_s é uma variável aleatória com decaimento exponencial. Note que essa densidade integra um. Desta forma, a FGM e a FGC são dadas por

$$M_{T_s}(t) = \frac{M_X(t+s)}{M_X(s)}$$

e

$$\mathbb{K}_{T_s}(t) = \mathbb{K}_X(t+s) - \mathbb{K}_X(s).$$

Então $\mathbb{E}[T_s] = \mathbb{K}'_{T_s}(0) = \mathbb{K}'_X(s)$ e $\text{var}(T_s) = \mathbb{K}''_{T_s}(0) = \mathbb{K}''_X(s)$. Seja $s_0 \in U$ e agora considere a distribuição normal para aproximar a verdadeira distribuição de T_{s_0} . Ela deverá ter média $x_0 := \mathbb{K}'_X(s_0)$ e variância $v_0 := \mathbb{K}''_X(s_0)$, e será dada por $x \mapsto \phi(x; x_0, v_0)$, onde ϕ representa a função densidade da distribuição normal. Utilizando (4.1), teremos que a aproximação para f_X será

$$x \mapsto \phi(x; x_0, v_0) M_X(s_0) e^{-s_0 x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} \exp\left(-\frac{1}{2v_0}(x - x_0)^2\right) M_X(s_0) e^{-s_0 x}.$$

A acurácia dessa aproximação de f_X , para um x fixo, depende crucialmente da escolha de s_0 . Sabemos que, em geral, a aproximação normal para a distribuição de uma variável aleatória X apresenta acurácia em torno da média de X , mas decai nas caudas. Desse modo, estamos motivados a escolher um s_0 tal que x seja próximo do ponto médio da cauda da distribuição. Em particular, desejamos escolher um valor de \hat{s} tal que

$$\mathbb{K}'_X(\hat{s}) = x. \quad (4.2)$$

Pode ser demonstrado que a solução é única para $\hat{s}_0 \in U$. A aproximação normal da cauda de uma variável aleatória com média x no ponto \hat{s} terá $\phi(x; \mathbb{K}'_X(\hat{s}), \mathbb{K}''_X(\hat{s}))$, e a aproximação de f_X dada por

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbb{K}_X''(\hat{s})}} \exp(\mathbb{K}_X(\hat{s}) - x\hat{s}) \quad (4.3)$$

onde

$$x = \mathbb{K}_X'(\hat{s}).$$

A aproximação \hat{f}_X é denotada como a aproximação de ponto de sela de primeira ordem para f_X , onde $\hat{s} = \hat{s}(x)$ é a raiz da equação de ponto de sela e é conhecido como ponto de sela da distribuição de X .

A aproximação da função de distribuição acumulada da variável aleatória X pode ser obtida integrando numericamente \hat{f}_X . Contudo, no célebre paper de Lugannani e Rice [42], foi derivada uma expressão simples para aproximação do ponto de sela da função de distribuição acumulada de X , dada por

$$\hat{F}_X(x^-) = \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{w}} - \frac{1}{\hat{u}} \right) \quad \text{com } x \neq \mathbb{E}[X] \quad (4.4)$$

onde Φ e ϕ representam, respectivamente, a função distribuição acumulada e a função densidade de uma distribuição normal padrão, onde

$$F_X(x^-) = P(X < x)$$

$$\hat{w} = \text{sgn}(\hat{s})\sqrt{2(\hat{s}x - \mathbb{K}_X(\hat{s}))}$$

onde $\text{sgn}(\hat{s})$ representa a função sinal, que retorna 0 para resultados de \hat{s} iguais a 0 (o que ocorreria apenas em condições extremas), retorna -1 para resultados negativos de \hat{s} , e 1 para valores positivos de \hat{s} . Temos ainda

$$\hat{u} = \begin{cases} \hat{s}\sqrt{\mathbb{K}_X''(\hat{s})} & \text{se } X \text{ for contínua,} \\ (1 - e^{-\hat{s}})\sqrt{\mathbb{K}_X''(\hat{s})} & \text{se } X \text{ for discreta.} \end{cases}$$

Uma maneira menos eficiente de estimação de \hat{u} seria por meio dos momentos de ordem mais alta:

$$\hat{u} = \hat{s}\sqrt{\mathbb{K}_X''(\hat{s})} \sqrt{1 + \frac{\mathbb{K}_X'''(\hat{s})}{\mathbb{K}_X''(\hat{s})} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{K}_X^{IV}(\hat{s})}{\mathbb{K}_X''(\hat{s})}}.$$

Observamos ainda que se $\hat{x} = \mathbb{E}[X]$, então $\mathbb{K}'_X(0) = \mathbb{E}[X]$ e $\hat{s} = 0$ é o ponto de sela para $\mathbb{E}[X]$. Então, na média, $\mathbb{K}_X(0) = 0$, e portanto $\hat{w} = 0$, fazendo com que \hat{F}_X seja inútil. Pode ser demonstrado que essa singularidade pode ser removida da seguinte forma:

$$\hat{F}_X(\mathbb{E}[X]) = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{K}''_X(0)}{6\sqrt{2\pi}(\mathbb{K}''_x(0))^{3/2}}.$$

No uso prático, conforme sugere Butler [20], é numericamente prudente a interpolação linear com base em $\mathbb{E}[X] \pm \epsilon$, onde ϵ é escolhido de forma que seja suficientemente pequeno de modo a assegurar acurácia, mas também suficientemente grande de modo a assegurar estabilidade numérica de (4.4) e de \hat{w}, \hat{u} .

4.3 Aproximações Ponto de Sela Aplicada ao Modelo CreditRisk+

Podemos reescrever a expressão (2.24) com a relação (2.11) como a FGC para o modelo CR+. Teremos, então

$$\psi(z) = \ln(G_X(e^z)) = \mu_0(\mathcal{P}_0(e^z) - 1) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k \mathcal{P}_k(e^z)} \right). \quad (4.5)$$

Sustituindo a função

$$\mathcal{Q}_k(z) \equiv \mu_k \mathcal{P}_k(e^z) = \sum_A w_{Ak} p_A e^{v_A z} \quad (4.6)$$

na equação (4.5), obtemos

$$\psi(z) = (\mathcal{Q}_0(z) - \mu_0) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln \left(\frac{\mu_k(1 - \delta_k)}{\mu_k - \delta_k \mathcal{Q}_k(z)} \right) \equiv \psi_0(z) + \sum_{k=1}^K \psi_k(z) \quad (4.7)$$

onde $\psi_k(z)$ foi introduzido apenas por conveniência de notação.

Vamos denotar D como um operador diferencial (ou seja, $D^j f(x)$ é a j -ésima derivada de f com respeito a x). Dessa forma, temos de (4.6)

$$D^j \mathcal{Q}_k(z) = \sum_A w_{Ak} p_A v_A^j e^{v_A z}, \quad \forall j \geq 0, k \in 0, 1, \dots, K. \quad (4.8)$$

Portanto, a primeira derivada de ψ_k será

$$\psi'_k(z) = \alpha_k \left(\frac{\alpha_k D \mathcal{Q}_k(z)}{\mu_k - \alpha_k \mathcal{Q}_k(z)} \right). \quad (4.9)$$

É útil, a título de generalização, definirmos

$$V_{j,k}(z) \equiv \frac{\alpha_k D^j \mathcal{Q}_k(z)}{\mu_k - \alpha_k \mathcal{Q}_k(z)}. \quad (4.10)$$

Podemos observar que as derivadas de $V_{j,k}(z)$ possuem a seguinte relação de recorrência:

$$DV_{j,k}(z) = V_{j+1,k}(z) + V_{j,k}(z)V_{1,k}(z), \quad (4.11)$$

por onde temos

$$\psi'_k(z) = \alpha_k V_{1,k}(z). \quad (4.12)$$

A partir de (4.11) podemos obter as derivadas de ordens mais altas de $\psi_k(z)$. A segunda, terceira e quarta derivadas são dadas por

$$\psi''_k(z) = \alpha_k (V_{2,k}(z) + V_{1,k}^2(z)) \quad (4.13)$$

$$\psi'''_k(z) = \alpha_k (V_{3,k}(z) + 3V_{2,k}(z)V_{1,k}(z) + 2V_{1,k}^3(z)) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \psi''''_k(z) = & \alpha_k (V_{4,k}(z) + 4V_{3,k}(z)V_{1,k}(z) + 3V_{2,k}^2(z) + 12V_{2,k}(z)V_{1,k}^2(z) \\ & + 6V_{1,k}^4(z)). \end{aligned}$$

As demais derivadas podem ser obtidas utilizando (4.8) e (4.11).

A FGC sempre satisfaz algumas condições. Em particular, como todos valores de w_{Ak} , p_A e v_A são não negativos e o produto $w_{Ak} p_A v_A$ é estritamente positivo, então

\mathcal{Q}_k e suas derivadas serão: positivas, contínuas, crescentes e funções convexas de z . Para obter os cumulantes, utilizamos as derivadas de ψ_k em $z = 0$. Como temos $\mathcal{Q}_k(0) = \mu_k$, teremos então

$$V_{j,k}(0) = \frac{1}{\alpha_k} D^j \mathcal{Q}_k(0) \quad (4.15)$$

e substituímos nas equações (4.12) a (4.15).

O cálculo dos cumulantes é extremamente rápido e possui grande acurácia, ou seja, o cálculo dos quatro primeiros momentos de uma carteira de milhões de clientes não leva mais do que alguns segundos.

Seja X a variável aleatória da perda agregada, com função de distribuição $F(x)$ e CGF $\psi(z)$, e seja \hat{z} a única raiz real da equação $\hat{x} = \psi'_X(\hat{z})$. A fórmula de Lugannani-Rice apresentada em (4.4) para a cauda de $F(x)$ será

$$1 - F(\hat{x}) \approx 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) \quad (4.16)$$

onde

$$\hat{w} = \text{sgn}(\hat{z})(\hat{z}\sqrt{2(\hat{z}\hat{x} - \psi(\hat{z}))}) \quad e \quad \hat{u} = (1 - e^{-\hat{z}})\sqrt{\psi''(\hat{z})}$$

e onde Φ e ϕ denotam, respectivamente, a função de distribuição acumulada e a função de densidade de uma distribuição normal padronizada.

Nas aplicações na área de risco, raramente estamos interessados em um valor de $F(x)$ para um particular valor de x . O conceito de V@R apresentado na seção 1.3 representa o problema inverso, ou seja, encontrar um montante de perda agregada x para um $F(x) = q$, onde q representa uma meta de probabilidade de solvência. O desafio para a implementação do método de aproximações ponto de sela no cálculo do V@R no modelo CR+ é encontrar o limite superior z^* válido para o domínio de $\psi(z)$. Como demonstrado em Gordy [29], desde que $q > F(\mathbb{E}[X])$, o limite z_k^* para cada setor k deverá satisfazer

$$0 < z_k^* < \frac{-\log(\delta_k)}{\sum_A \frac{w_{Ak} p_A}{\mu_k} v_A}. \quad (4.17)$$

Como $Q_k(z)$ é estritamente crescente em z , encontrar z_k^* nesse intervalo é computacionalmente trivial. Portanto, o cálculo do V@R no modelo CR+ por meio do método de aproximações ponto de sela decorrerá da seguinte forma:

1) Determinamos $z^* \equiv \min(z_1^*, \dots, z_K^*)$. Formamos uma grade de valores de z^* no intervalo aberto $(0, z^*)$.

2) Para cada ponto escolhido na grade de valores de z^* , calculamos os respectivos valores de \hat{x} , \hat{w} e \hat{u} a partir das derivadas e da função ψ .

3) Formamos uma tabela de pares de valores de $(1 - F(\hat{x}), \hat{x})$ utilizando a fórmula de Lugannani-Rice e Interpolamos para encontrar os valores de \hat{x} correspondentes a $1 - F(\hat{x}) = 1 - q$.

As aproximações ponto de sela para o V@R $_q$ sempre existe. Se $\hat{z} \rightarrow z^*$ então \hat{w}, \hat{u} e \hat{x} tenderão a ∞ . Ressaltamos que podemos calcular o V@R $_q$ para qualquer $q \in (F(\mathbb{E}[X]), 1)$, podendo sempre encontrar um valor de $\hat{z} \in (0, z^*)$ e utilizar a fórmula de Lugannani-Rice para $1 - F(x) = 1 - q$.

Temos, portanto, que

$$P(X \geq n) \approx LR_{\hat{x}}(n; \hat{w}; \hat{u}) = 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) = 1 - q$$

4.4 Comportamento da Cauda da Distribuição de Perda Agregada no Modelo CreditRisk+ e o Método de Verificação de Resultados

A partir de (2.24), que representa FGP, e as considerações finais da seção 2.4, podemos descrever a perda agregada no modelo CR+ como a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição binomial negativa composta, com parâmetros $(1 - \delta_k, \alpha_k)$, como também afirma Gordy[29]. Como é mostrado em Panjer e Willmot [54], se $x \rightarrow \infty$, a cauda da função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X com distribuição binomial negativa composta pode ser aproximada por

$$1 - F(x) \approx C(x)x^\gamma e^{-rx} \tag{4.18}$$

para algum $\gamma \in \mathfrak{R}$ e $r > 0$, onde $C(x)$ varia lentamente até o infinito. Segundo Embrechts *et al.*[24], F está no Domínio de Atração Maximal - DAM (*Maximal Domain of Attraction - MDA*) de uma distribuição de Gumbel se

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - F(u + x/r)}{1 - F(u)} = e^{-x}.$$

Para $\forall x > 0$, da equação (4.19) para u grande,

$$\frac{1 - F(u + x/r)}{1 - F(u)} \approx \frac{C(u + x/r)}{C(u)} \frac{(u + x/r)^\gamma}{u^\gamma} e^{-rx/r} \approx \frac{C(u + x/r)}{C(u)} e^{-x}.$$

Por definição, funções que variam lentamente até o infinito tem $\frac{C(u+x/r)}{C(u)} \rightarrow 1$ quando $u \rightarrow \infty$. Dessa forma, $F(x)$ é DAM Gumbel (isto é, pertence ao DAM Gumbel), o que implica que existe um $\beta > 0$ tal que a $G_X(z)$ converge na cauda para uma distribuição exponencial com parâmetro β (para esses resultados, ver Embrechts *et al.* [24], Teorema 3.4.13). Contudo, ainda não foi demonstrado que a soma de variáveis aleatórias independentes DAM Gumbel também seja DAM Gumbel. Segundo Gordy[29], extensivas análises numéricas sugerem que essa propriedade seja válida para a distribuição de perda agregada no modelo CR+.

Considerando o comportamento de cauda da distribuição de perda agregada no modelo CR+, podemos, segundo Gordy[29], implementar um método de diagnóstico para os valores de V@R estimados pelo método recursivo de Panjer. Seja q um percentil que determine o V@R e que seja suficientemente distante na cauda da distribuição de perda agregada. Podemos aplicar a teoria de valores extremos aproximando a cauda da distribuição de perda agregada no modelo CR+ para a cauda de uma distribuição exponencial com parâmetro β . Por construção, como sugere Gordy [29], $G(j^*) \approx q$, então

$$q \approx G(j^*) \approx 1 - e^{-j^*\beta}$$

onde β pode ser estimado (desde que estejamos na cauda da distribuição) como:

$$\beta = \frac{-j^*}{\log(1 - q)}.$$

Portanto, para cada q e seu respectivo j^* podemos calcular o erro relativo absoluto em comparação com o método escolhido¹ (a recursividade de Panjer, no caso):

$$\eta = \frac{|q_{\text{método}} - q_{\text{aproximado}}|}{|q_{\text{método}}|}.$$

¹Esse método de verificação também pode ser aplicado para a estimação da perda agregada no modelo CR+ estimado via *nested evaluation* (Giese[28]).

Capítulo 5

Exemplo Numérico do Modelo CreditRisk⁺: Recursividade de Panjer e Aproximações Ponto de Sela

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um exemplo numérico hipotético que visa elucidar os mecanismos de cálculo das discussões tratadas nos capítulos precedentes. A partir de uma carteira hipotética de clientes, todos os principais valores a serem estimados no ensaio com dados reais, são calculados. As questões sobre a instabilidade numérica do algoritmo de Panjer podem ser melhor detalhadas por meio da comparação dos resultados obtidos manual e computacionalmente. É realizado o cálculo de CER segundo as definições apresentadas no capítulo 1, além da estimação via aproximações ponto de sela para o valor de $V@R$. É possível também, utilizar o método de verificação apresentado no último capítulo para determinar os erros de cada estimativa (segundo o cálculo manual e computacional).

Portanto, teremos na seção 5.2 a estimação do V@R utilizando a recursividade de Panjer, verificando a diferença entre a estimação realizada caso a caso e realizada utilizando o algoritmo computacional. As questões sobre a instabilidade numérica do algoritmo de Panjer, apresentadas na seção 3.6, são evidenciadas nesta seção. Na seção 5.3, estimamos, para o mesmo conjunto de clientes, o V@R via aproximações ponto de sela. Na seção 5.4 estimamos o CER segundo as definições da seção 1.4. Finalizamos o capítulo na seção 5.5. Utilizando o método de verificação detalhado na seção 4.4 e apresentando um comparativo dos valores estimados de V@R por diferentes métodos.

5.2 Estimação do V@R Via Recursividade de Panjer

Considere um exemplo ilustrativo do cálculo de V@R comparando a recursividade de Panjer e o método de aproximações ponto de sela. Para tanto nossa carteira hipotética será composta de 4 clientes, todos dentro de um mesmo setor e sem risco idiossincrático(ou seja, $K = 1 \Rightarrow w_{Ak} = 1$, $\forall A \in \{1, 2, 3, 4\}$). Supondo também que a volatilidade da taxa de *default* seja $\sigma_A^2 = \frac{p_A^2}{1,2}$ (para facilitar os cálculos) e escolhendo o número de faixas $B = 8$. Os resultados estão na Tabela 5.1.

A	K	w_{Ak}	p_A	σ_A^2	\tilde{v}_A	v_A
1	1	1	0,01	0,000083	100	2
2	1	1	0,02	0,000333	50	1
3	1	1	0,03	0,000750	200	4
4	1	1	0,04	0,001333	400	8

Tabela 5.1: Exemplo Numérico - Recursividade de Panjer e Aproximações Ponto de Sela

Temos v_A dado por (2.1), ou seja

$$U = \frac{\max[\tilde{v}_A]}{B} = \frac{400}{8} = 50.$$

Por exemplo,

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{U} = \frac{100}{50} = 2.$$

Determinamos agora os parâmetros que são calculados uma única vez, conforme 2.19, 2.24 e 3.3.

$$\mu_k = \sum_{A=1}^4 w_{Ak} p_A \Rightarrow \mu = \sum_{A=1}^4 1 \cdot p_A = 0,01 + 0,02 + 0,03 + 0,04 = 0,1$$

$$\sigma^2 = \sum_{A=1}^4 \sigma_A^2 = 0,000083 + 0,000333 + 0,000750 + 0,001333 = 0,0025$$

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \Rightarrow \alpha = \frac{(0,1)^2}{0,0025} = 4$$

$$\delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_k + \alpha_k} \Rightarrow \delta = \frac{0,1}{0,1 + 4} = 0,02439$$

$$\eta_k = \alpha_k \delta_k \Rightarrow \eta = 4 \times 0,02439 = 0,097561.$$

A título ilustrativo, apresentaremos o cálculo das cinco primeiras iterações utilizando a recursividade de Panjer. Para tanto, são necessários os seguintes componentes (segundo os resultados apresentados na seção 2.6): $\mu_{n,k} = \sum_{v_A=n} w_{Ak} p_A$ como

$$k = 1, w_{Ak} = 1 \text{ temos } \mu_n = \sum_{v_A=n} p_A;$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_1 = 0,02$$

$$\mu_2 = 0,01$$

$$\mu_3 = p_1 + p_2 = 0,02 + 0,01 = 0,03$$

$$\mu_4 = 0,03$$

$$\mu_5 = p_2 + p_3 = 0,02 + 0,03 = 0,05,$$

e assim sucessivamente. Calculamos agora os coeficientes a_n e b_n . Teremos,

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{n_1+\dots+n_K=n} \prod_{k=0}^K \left(\mathbb{I}_{0n_k} - \mathbb{I}_{(n_k)} \frac{\delta_k \mu_{n_k,k}}{\mu_k} \right) \\
&= \sum_{n_1=n} \left(\mathbb{I}_{0n_1} - \mathbb{I}_{(n_1)} \frac{\delta \mu_{n_1}}{\mu} \right) \Big|_{z=0}.
\end{aligned}$$

Teremos, portanto,

$$\begin{aligned}
b_0 &= \underbrace{\mathbb{I}_{00}}_1 - \underbrace{\mathbb{I}_{(0)} \frac{\delta \mu_0}{\mu}}_0 = 1 \\
b_1 &= \underbrace{\mathbb{I}_{01}}_0 - \underbrace{\mathbb{I}_{(1)} \frac{\delta \mu_1}{\mu}}_1 = \frac{0,02439 \times 0,02}{0,1} = 0,004878 \\
b_2 &= \underbrace{\mathbb{I}_{02}}_0 - \underbrace{\mathbb{I}_{(2)} \frac{\delta \mu_2}{\mu}}_1 = \frac{0,02439 \times 0,01}{0,1} = 0,002439 \\
b_3 &= \underbrace{\mathbb{I}_{03}}_0 - \underbrace{\mathbb{I}_{(3)} \frac{\delta \mu_3}{\mu}}_{1(v_A=v_1+v_2=3)} = \frac{0,02439 \times 0,03}{0,1} = 0,007317 \\
b_4 &= \underbrace{\mathbb{I}_{04}}_0 - \underbrace{\mathbb{I}_{(4)} \frac{\delta \mu_4}{\mu}}_1 = \frac{0,02439 \times 0,03}{0,1} = 0,007317 \\
b_5 &= \underbrace{\mathbb{I}_{05}}_0 - \underbrace{\mathbb{I}_{(5)} \frac{\delta \mu_5}{\mu}}_{1(v_A=v_2+v_3=5)} = \frac{0,02439 \times 0,05}{0,1} = 0,012195.
\end{aligned}$$

Calculando agora os coeficientes a_n ,

$$\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=0}^K \sum_{n_1+\dots+n_K=n} \frac{\eta_k \mu_{n_k+1,k}}{\mu_k} (n_k + 1) \mathbb{I}_{(n_k+1)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^K \left(\mathbb{I}_{0n_j} - \frac{\delta_j \mu_{n_j,j}}{\mu_j} \right) \\
&= \sum_{n_1=n} \frac{\eta \mu_{n_1+1}}{\mu} (n_1 + 1) \mathbb{I}_{(n_1+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\eta\mu_1}{\mu}(1) \underbrace{\mathbb{I}_{(1)}}_1 = \frac{0,09756 \times 0,02 \times 1}{0,1} = 0,019512 \\
a_1 &= \frac{\eta\mu_2}{\mu}(2) \underbrace{\mathbb{I}_{(2)}}_1 = \frac{0,09756 \times 0,01 \times 2}{0,1} = 0,019512 \\
a_2 &= \frac{\eta\mu_3}{\mu}(3) \underbrace{\mathbb{I}_{(3)}}_{1(v_A=v_1+v_2=3)} = \frac{0,09756 \times 0,03 \times 3}{0,1} = 0,087804 \\
a_3 &= \frac{\eta\mu_4}{\mu}(4) \underbrace{\mathbb{I}_{(4)}}_1 = \frac{0,09756 \times 0,03 \times 4}{0,1} = 0,117072 \\
a_4 &= \frac{\eta\mu_5}{\mu}(5) \underbrace{\mathbb{I}_{(5)}}_{1(v_A=v_2+v_3=5)} = \frac{0,09756 \times 0,05 \times 5}{0,1} = 0,2439.
\end{aligned}$$

E dessa forma podemos calcular a distribuição de perda agregada pela recursividade de Panjer utilizando

$$g_{n+1} = \frac{1}{(n+1)b_0} \left(\sum_{j=0}^{\min(d_A, n)} a_j g_{n-j} - \sum_{j=0}^{\min(d_B, n)-1} (n-j)b_{j+1} g_{n-j} \right).$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
g_0 &= (1 - \delta)^\alpha = (1 - 0,02439)^4 = 0,90595, \\
g_1 &= g_0 \frac{a_0}{b_0} = 0,90595 \times \frac{0,019512}{1} = 0,0176768.
\end{aligned}$$

Para $n = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
g_2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^1 a_j g_{1-j} - [(1-j)b_{j+1}g_{1-j}] \right) \\
&= 0,5([a_0g_1 + a_1g_0] - b_1g_1) \\
&= 0,5([0,019512 \times 0,01767 + 0,019512 \times 0,90595] \\
&\quad - 0,004878 \times 0,01767) = 0,008579.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
g_3 &= \frac{1}{3} \left(\sum_{j=0}^2 a_j g_{2-j} - \left[\sum_{j=0}^1 (2-j) b_{j+1} g_{2-j} \right] \right) \\
&= 0,33([a_0 g_2 + a_1 g_1 + a_2 g_0] - [2b_1 g_2 + b_2 g_1]) \\
&= 0,33([0,019512 \times 0,008579 + 0,019512 \times 0,01767 + 0,087804 \times 0,90595] - \\
&\quad [2 \times 0,004878 \times 0,008579 + 0,002439 \times 0,01767]) = 0,0263773.
\end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
g_4 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^3 a_j g_{3-j} - \left[\sum_{j=0}^2 (3-j) b_{j+1} g_{3-j} \right] \right) \\
&= 0,25([a_0 g_3 + a_1 g_2 + a_2 g_1 + a_3 g_0] - [3b_1 g_3 + 2b_2 g_2 + b_3 g_1]) \\
&= 0,25([0,019512 \times 0,0263773 + 0,019512 \times 0,008579 + \\
&\quad 0,087804 \times 0,01767 + 0,117072 \times 0,90595] - \\
&\quad [3 \times 0,004878 \times 0,0263773 + 2 \times 0,002439 \times 0,008579 \\
&\quad + 0,007317 \times 0,01767]) = 0,026934.
\end{aligned}$$

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
g_5 &= \frac{1}{5} \left(\sum_{j=0}^4 a_j g_{4-j} - \left[\sum_{j=0}^3 (4-j) b_{j+1} g_{4-j} \right] \right) \\
&= 0,2([a_0 g_4 + a_1 g_3 + a_2 g_2 + a_3 g_1 + a_4 g_0] - [4b_1 g_4 + 3b_2 g_3 + 2b_3 g_2 + b_4 g_1]) \\
&= 0,2([0,019512 \times 0,026934 + 0,019512 \times 0,0263773 + \\
&\quad 0,087804 \times 0,008579 + 0,117072 \times 0,01767 + 0,2439 \times 0,90595] - \\
&\quad [4 \times 0,004878 \times 0,026934 + 3 \times 0,002439 \times 0,0263773 + \\
&\quad 2 \times 0,007317 \times 0,008579 + 0,007317 \times 0,01767]) = 0,044769.
\end{aligned}$$

Segue-se dessa forma até que a variável indicadora $\mathbb{I}_{(n_k)}$ do coeficiente b_n seja zero, pois na prática não haverá nenhuma combinação $n_k > r_{G(z)}$, onde

$$r_{G(z)} = \sum_{k=0}^K \sum_{A=1}^N v_{Ak}$$

é a perda máxima da carteira:

$$r_{G(z)} = \sum_{A=1}^4 v_A = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$r_{G(z)} \times U = 15 \times 50 = 750.$$

Observe que $\sum_{A=1}^4 \tilde{v}_A = 100 + 50 + 200 + 400 = 750$. Manualmente calculamos, portanto, até $n = 15$, que corresponde a 1 na função de distribuição acumulada. Contudo, conforme apresentado na seção 3.6, computacionalmente essa variável indicadora continua a efetuar combinações acima de $r_{G(z)}$ até atingir um determinado percentil (podendo ser atingido acima do $r_{G(z)}$ por razão das aproximações) ou um determinado número de iterações. Apresentaremos a seguir um comparativo do cálculo computacional e manual do valor de V@R desse exemplo.

Calculamos o V@R com um grau de solvência representado pelo percentil $q = 99,5\%$ para as duas modalidades (manual e computacionalmente) de cálculo do exemplo por meio da sugestão de interpolação apresentada na seção 1.3;

$$V@R_{(q_{Método}(q_1, q_2))} = U \times \left[(v_{A_{q_2}} - 1) + \left(\frac{q - q_1}{q_2 - q_1} \right) \right]$$

A partir dos resultados em destaque na Figura 5.1, contendo uma tabela comparativa 5.1 de valores do método computacional e manual, calculamos o V@R de cada modalidade:

$$V@R_{(0,995,Manual)} = 50. \left[(7 - 1) + \left(\frac{0,995 - 0,994414}{0,999685 - 0,994414} \right) \right] = 305,55$$

$$V@R_{(0,995,Computacional)} = 50. \left[(8 - 1) + \left(\frac{0,995 - 0,961229}{0,996443 - 0,961229} \right) \right] = 335,65.$$

5.3 Estimação do V@R Via Aproximações Ponto de Sela

Calcularemos agora pelo método aproximações ponto de sela. Primeiramente, determinamos o intervalo aberto do ponto de sela, conforme 4.18:

Tabela 5.1 - Comparativo do Cálculo Computacional e Manual do Exemplo Didático								
Cálculo Computacional					Cálculo Manual			
n_{it}	g_n	v_A	valor	$F(g_n)$	a_n	b_n	g_n	$F(g_n)$
1	0,90595	0	0	0,905950	0,019512	1	0,905950	0,905950
2	0,01737	1	50	0,925058	0,019512	0,004878	0,017676	0,923626
3	0,00889	2	100	0,933952	0,087804	0,002439	0,008590	0,932216
4	0,00021	3	150	0,934161	0,117072	0,007317	0,026378	0,958594
5	0,02611	4	200	0,960274	0,243900	0,007317	0,026934	0,985528
6	0,00062	5	250	0,960899	0,409700	0,012195	0,004476	0,990004
7	0,00032	6	300	0,961220	0,156096	0,026820	0,004410	0,994414
8	0,00001	7	350	0,961229	0,052682	0,017070	0,005271	0,999685
9	0,03521	8	400	0,996443	0,048781	0,009756	0,000141	0,999826
10	0,00084	9	450	0,997288	0,068292	0,014634	0,000008	0,999833
11	0,00043	10	500	0,997722	0,068685	0,012195	0,000038	0,999871
12	0,00001	11	550	0,997734	0,078048	0,017073	0,000015	0,999886
13	0,00126	12	600	0,998991	0,087804	0,017073	0,000055	0,999941
14	0,00004	13	650	0,999027	0,097560	0,019512	0,000050	0,999991
15	0,00002	14	700	0,999046	-	0,021951	0,000005	0,999996
16	0,00000	15	750	0,999047	-	0,024390	0,000004	1,000000
17	0,00086	16	800	0,999905	-	-	-	-
18	0,00002	17	850	0,999930	-	-	-	-
19	0,00001	18	900	0,999942	-	-	-	-
20	0,00000	19	950	0,999943	-	-	-	-
21	0,00004	20	1000	0,999979	-	-	-	-
22	0,00000	21	1050	0,999980	-	-	-	-
23	0,00000	22	1100	0,999981	-	-	-	-
24	0,00000	23	1150	0,999981	-	-	-	-
25	0,00002	24	1200	0,999998	-	-	-	-

OBS: O cálculo computacional tem por premissa: $\max(n_{it})=100000$ ou Percentil $\max(0,999998)$.

Figura 5.1: Comparativo do Cálculo Computacional e Manual do Exemplo Didático

$$0 < z_k^* < \frac{-\ln(\delta_k)}{\frac{\sum_A p_A v_A}{\mu_k}}$$

Portanto, teremos

$$0 < z^* < \frac{-\ln(0,02439)}{\frac{(0,02+0,02+0,12+0,32)}{0,1}} = 0,773662 \Rightarrow (0; 0,773662)$$

Calcularemos agora o valores dos polinômios que serão utilizados para o cálculo de \hat{x} , \hat{w} e \hat{u} (segundo as seções 4.2 e 4.3). Para tanto, consideramos o ponto de sela $\hat{z} = 0,406 \in (0; 0,773662)$.

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \alpha \ln \left(\frac{1 - \delta}{1 - \frac{\delta}{\mu} \sum_{A=1}^4 p_A e^{v_A z}} \right) \\ &= 4 \ln \left(\frac{1 - (0,02439)}{1 - \left(\frac{0,02439}{0,1}\right)[0,01e^{2z} + 0,02e^z + 0,03e^{4z} + 0,04e^{8z}]} \right) \Bigg|_{z=\hat{z}} \\ &= 1,3339 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x} = \psi'(z) &= \alpha \left(\frac{\delta \sum_{A=1}^4 p_A v_A e^{v_A z}}{\mu - \delta \sum_{A=1}^4 p_A e^{v_A z}} \right) \\
&= 4 \left(\frac{(0,02439)[0,01 \times 2e^{2z} + 0,02 \times 1e^z + 0,03 \times 4e^{4z} + 0,04 \times 8e^{8z}]}{0,1 - (0,02439)[0,01e^{2z} + 0,02e^z + 0,03e^{4z} + 0,04e^{8z}]} \right) \Bigg|_{z=\hat{z}} \\
&= 12,450899
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi''(z) &= \alpha \left(\frac{\delta \sum_{A=1}^4 p_A v_A^2 e^{v_A z}}{\mu - \delta \sum_{A=1}^4 p_A e^{v_A z}} \right) \\
&= 4 \left(\frac{(0,02439)[0,01 \times 2^2 e^{2z} + 0,02 \times 1^2 e^z + 0,03 \times 4^2 e^{4z} + 0,04 \times 8^2 e^{8z}]}{0,1 - (0,02439)[0,01e^{2z} + 0,02e^z + 0,03e^{4z} + 0,04e^{8z}]} \right. \\
&\quad \left. + [\psi'(z)]^2 \right) \Bigg|_{z=\hat{z}} \\
&= 134,293816.
\end{aligned}$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
\hat{w} &= 1 \times \sqrt{2(0,406.12,450899 - 1,3339)} = 2,728063 \\
\hat{u} &= (1 - e^{-0,406}) \sqrt{134,293816} = 3,866971.
\end{aligned}$$

Calculando a fórmula de Lugananni-Rice (ver 4.4 e 4.17), teremos para $\hat{z} = 0,406$

$$P(X \geq 12,450899) = 1 - \Phi(2,728063) + \phi(2,728063) \left(\frac{1}{3,866971} - \frac{1}{2,728063} \right) = 0,00423,$$

o que representa o percentil $1 - 0,00423 = 0,99577$ e um $V@R = 12,450899 \times 50 = 622,54$.

5.4 Estimação do CER

Calcularemos agora o CER para o exemplo, utilizando as definições apresentadas na seção 1.4, assumindo a premissa de que os devedores em questão são clientes classificados como varejo e utilizando o valor de PDI de 0,45 definido por Basileia. Portanto, seu valor de correlação para cada cliente é dado por

$$R_{varejo} = 0,03 \times \left[\frac{1 - e^{-35 \times PD}}{1 - e^{-35}} \right] + 0,16 \times \left[1 - \frac{1 - e^{-35 \times PD}}{1 - e^{-35}} \right]$$

e com respectivo valor de CER para cada cliente dado por

$$K = PDI \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + R^{0,5} \times \Phi^{-1}(0,999)}{(1 - R)^{0,5}} \right) - PD \right]$$

$$CER = K \times EB \times 12,5.$$

Por exemplo, para o cliente $A = 1$, teremos

$$R_{varejo,A=1} = 0,03 \times \left[\frac{1 - e^{-35 \times 0,01}}{1 - e^{-35}} \right] + 0,16 \times \left[1 - \frac{1 - e^{-35 \times 0,01}}{1 - e^{-35}} \right] = 0,121609$$

$$K_{A=1} = 0,45 \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(0,01) + (0,121609)^{0,5} \times \Phi^{-1}(0,999)}{(1 - 0,121609)^{0,5}} \right) - 0,01 \right] = 0,036618$$

$$CER_{A=1} = K_{A=1} \times EB_{A=1} \times 12,5 = 0,036618 \times 100 \times 12,5 = 45,772725.$$

Teremos, portanto, calculando para cada cliente os valores da Tabela 5.2

A	p_A	\tilde{v}_A	$R_{Varejo,A}$	CER_A
1	0,01	100	0,121	45,77
2	0,02	50	0,094	28,99
3	0,03	200	0,075	125,58
4	0,04	400	0,062	260,05

Tabela 5.2: Exemplo N merico CER

Temos, portanto, que o $CER = \sum_{A=1}^4 CER_A = 45,77 + 28,99 + 125,58 + 260,05 = 460,40$. Este valor de CER somado aos demais ativos ponderados pelos respectivos riscos ($CER_{mercado}, CER_{liquidez}, CER_{operacional}$), deve estar, no Brasil, acima 11% de todos os ativos de um banco.

5.5 Aplicação do Método de Verificação e Comparação de Resultados

Apresentaremos a verificação de resultados utilizando o método de verificação descrito na seção 4.4. Dessa forma, teremos para o $V@R_{Manual}$ um q de 0,9996 e um número de *default* estimado de 6. Podemos, portanto, calcular o β como sendo:

$$\beta = \frac{-j^*}{\log(1-q)} \Rightarrow \beta_{Manual} = \frac{-6}{\ln(1-0,9996)} = 1,1324.$$

Temos, portanto, um q aproximado de

$$q \approx G(j^*) \approx 1 - e^{-j^*\beta_{Manual}} = 1 - e^{-6 \cdot 1,1324} = 0,9988.$$

Teremos, então, um erro relativo absoluto (em percentual) de

$$\eta_{Manual} = \frac{|0,9996 - 0,9988|}{0,9996} \cdot 100 = 0,008\%.$$

Calculamos dessa mesma maneira, para o método computacional:

$$\beta_{Computacional} = \frac{-7}{\ln(1-0,9964)} = 1,2440$$

$$q \approx 1 - e^{-j^*\beta_{Computacional}} = 1 - e^{-7 \cdot 1,2440} = 0,9998$$

$$\eta_{Computacional} = \frac{|0,9964 - 0,9998|}{0,9964} \cdot 100 = 0,3447\%.$$

Podemos, portanto, comparar o V@R calculado pelo algoritmo recursivo de Panjer, manualmente, pelo método de aproximações ponto de sela e o CER por meio da Tabela 5.3.

Vale ressaltar que a diferença do V@R no modelo CR+ calculado computacionalmente e por meio do método de aproximações ponto de sela apresentada nesse exemplo didático deve-se aos resultados encontrados em Gordy[29], segundo o qual existe uma complementaridade entre os dois métodos (Panjer e aproximações ponto de sela). Aproximações ponto de sela será adequado onde o algoritmo de Panjer for lento e não

<i>Método</i>	<i>Valor</i>	<i>ERA</i>
$V@R_{(0,995,Manual)}$	305,55	0,008%
$V@R_{(0,995,Computacional)}$	335,65	0,3447%
$V@R_{(0,995,Ponto\ de\ sela)}$	622,54	-
CER	460,40	-

Tabela 5.3: Exemplo Numérico Comparativo de V@R Estimado por Diferentes Métodos e CER

confiável (grande quantidade de devedores), e o algoritmo de Panjer serão adequadas quando for de rápido processamento (quantidade pequena de devedores, como no exemplo). Contudo para ambos os métodos, extrema heterogeneidade das exposições pode comprometer a acurácia das estimativas (Annaert *et. al.* [1]). A expectativa é que os modelos de V@R estimem valores menores do que o CER exigido pelo agente regulador por considerar fatores de riscos e correlações além de utilizar metodologias mais elaboradas do que a utilizada de forma padrão no CER.

Capítulo 6

Análise de Resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos no processamento de uma base de dados real contendo 16.058.446 de clientes. Essa base de dados refere-se a clientes de um Banco¹ de atuação nacional e internacional com operações de crédito ativas de clientes PF e PJ na posição mensal de janeiro de 2009, excluindo-se, contudo, os clientes caracterizados como PJ Corporate (grandes corporações empresariais), Bancos e Países.

Quando não especificado, o modelo padrão supõe que a volatilidade da taxa de *default* é dada conforme sugestões de Gordy [29], Balzarotti *et al.*[7,8] e também presente no modelo original CSFP [20], ou seja 50% da PD. Neste modelo padrão, utilizaremos um número de 100 faixas ($B = 100$) e um único setor sem risco idiossincrático². Teremos ainda no modelo padrão, a fim de garantir convergência numérica, $n_{it} = 100000$, ou um percentil acumulado máximo de 0.99998. Todos os algoritmos presentes nesta dissertação, além dos resultados obtidos diretamente de procedimentos pré-programados, foram desenvolvidos e obtidos utilizando o aplicativo SAS³.

¹Essa base de dados foi disponibilizada segundo o compromisso de omissão da instituição fornecedora dos dados em caso de publicação desse estudo em qualquer veículo de divulgação.

²Estimações da distribuição de perda agregada utilizando um setor sem risco idiossincrático, onde baseou-se o presente estudo, pode ser encontrado em Gordy [29], Balzarotti *et al.*[7,8]

³Statistical Analysis System - Aplicativo estatístico multi-linguagem (SQL, Data Step, Macros etc.) que manipula, processa e trata bases de dados de grande porte; possui um *switch* estatístico com procedimento pré programado (proc's), além de permitir o desenvolvimento e implementação

Na seção 6.2, apresentaremos uma análise exploratória dos componentes de entrada do modelo CR+. Tais componentes foram definidos na seção 1.2. Essa análise será feita considerando aspectos peculiares dessa base de dados, como metodologia de *credit scoring* utilizada para estimação da PD, conceito de *default* assumido, a distribuição de valores de exposição segundo tipo de pessoa (PF e PJ), entre outros.

Na seções 6.3 a 6.5, apresentaremos resultados que elucidarão as questões tratadas no capítulo 3. Na seção 6.3, serão estimados valores de V@R com a finalidade de analisar os efeitos do número de faixas sobre V@R estimado por meio da recursividade de Panjer e da estimação de CE considerando um limite para validade da hipótese da aproximação de Poisson. Na seção 6.4, é testada a ausência de subaditividade do V@R por meio da estimação de V@R para diferentes tipos de clientes (PF e PJ). Serão apresentados também nessa seção os resultados de V@R para diferentes números de faixas determinados por medidas exploratórias da distribuição de EXL, como média, mediana e intervalo interquartilico.

Na seção 6.5, apresentaremos estimativas de V@R para diferentes valores sugeridos na literatura para a volatilidade da taxa de *default*, observando esses valores com relação ao CER, conforme abordado em Schechtman *et al.* [59]. Finalizamos o capítulo na seção 6.6 com a comparação do V@R estimado pelo método aproximações ponto de sela e por meio do algoritmo recursivo de Panjer.

6.2 Análise dos Componentes de Entrada do Modelo CreditRisk+

6.2.1 Conceito de *Default*

A Data de Default (DD) é dada em dias e é determinada por tipo de produto de crédito e suas modalidades. Esta data não é simplesmente um indicativo de que determinada operação está em atraso: ela corresponde ao número de dias a partir do qual o número de clientes não pagantes (inadimplentes) é maior que o número de clientes

de algoritmos proprietários.

pagantes. Será considerada em default a operação em que o número de dias vencidos for maior que a DD, caracterizando a inadimplência (*default*). Operações com atrasos abaixo da DD são consideradas operações ativas de crédito e entram para o cálculo do V@R. Quando não há DD calculada para determinado produto/modalidade (produtos novos ou não contemplados na modelagem), é considerada a data padrão de DD de 60 dias.

Na data do estudo, 931 produtos e modalidades, dos 1594 com exposição de crédito, possuíam DD calculadas. Todos os demais utilizaram a data de *default* padrão. Desses 931 produtos/modalidades, a maioria é de produtos orientados a clientes PJ. Poucos produtos de clientes PF possuem data de *default* acima de 60 dias, diferentemente do que ocorre com clientes PJ, em que a data de *default* para a maioria dos produtos está acima de 150 dias, conforme mostra a Tabela 6.1.

Tipo de Cliente	Acima de 60 dias	Abaixo de 60 dias	Total	Demais
PF	10	101	111	648
PJ	811	9	820	15
	821	110	931	663

Tabela 6.1: Produtos de Crédito e Data de *Default* por Tipo de Cliente.

Vale ressaltar que a maior parte dos demais produtos sem cálculo de data de *default* são de clientes PF.

6.2.2 Perda Dada Inadimplência (PDI)

Conforme já definido na seção 1.2, a Perda Dada Inadimplência representa o percentual estimado da exposição que não será recuperado em caso de inadimplência, ou seja, trata da severidade da perda de ativos em *default*. É um atributo da operação e no modelo utilizado nesse estudo leva em conta o tipo de pessoa - física ou jurídica - a região geográfica onde a operação foi realizada e o produto. Quando não há PDI calculada, é atribuída a PDI padrão de 50%.

Dos 1594 produtos com exposição de crédito, considerando tipo de pessoa e região geográfica, apenas 853 possuem PDI calculada. O restante utiliza a PDI padrão de 50% (independente do tipo de pessoa e região - mais conservador do que estabelece

Basiléia II com PDI de 45%). Temos, portanto, a seguinte distribuição de PDI por região e tipo de pessoa(Tabela 6.2):

TABELA 6.2 - DISTRIBUIÇÃO DA PERDA DADA INADIMPLÊNCIA MÉDIA POR REGIÃO E TIPO DE PESSOA		
REGIÃO	PF	PJ
NORTE	53,16%	54,33%
NORDESTE	55,83%	63,43%
SUDESTE	49,40%	56,68%
SUL	53,57%	54,81%
CENTRO-OESTE	47,03%	59,91%
TOTAL	52,91%	63,30%

Figura 6.1: PDI por Região e Tipo de Pessoa

6.2.3 Probabilidade de *Default*

A probabilidade de *default* do cliente é apurada por meio de modelos estatísticos de *Credit Score* e *Behavior Score*. Para a maioria das metodologias utilizadas neste estudo, essas estimativas são resultados de modelos de regressão logística. A probabilidade de *default* é determinada, dessa forma, por oportunidade da análise de risco e estimação do limite de crédito do cliente, respeitada a dinâmica em função do porte e do tipo de pessoa e da metodologia de risco (PF, Microempresa - MPE, Produtor Rural - PR, Empresa - EMP, entre outros). Essas metodologias presentes no estudo correspondem a 95,96% de todos os clientes com operações ativas de crédito no período considerado. Em seguida, esta probabilidade (Frequência Esperada de Inadimplência - FEI) é agrupada em nove faixas de risco (*Rating* de AAA a E) conforme a Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Faixas de *rating* associadas aos riscos:

RISCO	Faixa da PD (FEI)	RISCO	Faixa da PD (FEI)
AAA	0,00000 – 0,00034	C+	0,01830 – 0,04980
AA	0,00034 – 0,00091	C	0,04980 – 0,13530
A	0,00091 – 0,00248	D	0,13530 – 0,36788
B+	0,00248 – 0,00674	E	0,36788 - 0,99999
B	0,00674 – 0,01830		

Figura 6.2: Faixas de *Rating*

Primeiramente, analisaremos a distribuição de clientes por *rating*.

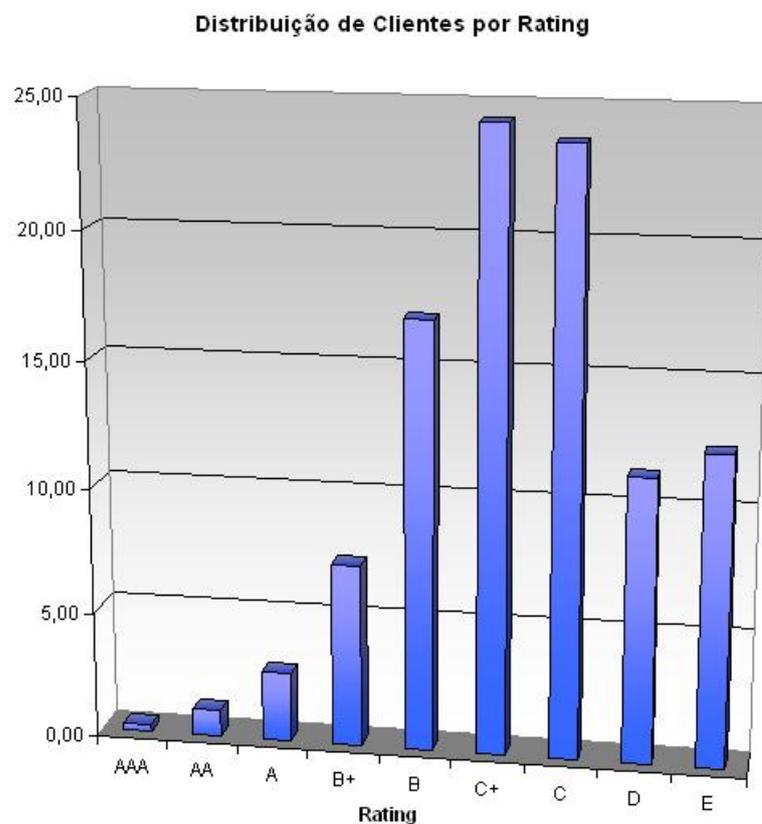


Figura 6.3: Distribuição de Clientes por *Rating*

Tabela 6.4 - Distribuição de Clientes por *Rating*

Rating	Quantidade de clientes	%	PD - média	Desvio Padrão - PD
AAA	44926	0,28	0,000232	0,000068
AA	170792	1,06	0,000627	0,000165
A	444351	2,77	0,001701	0,000452
B+	1170108	7,29	0,004670	0,001233
B	2724005	16,96	0,012245	0,003349
C+	3910383	24,35	0,031041	0,008743
C	3799375	23,66	0,092755	0,025160
D	1816547	11,31	0,267512	0,073313
E	1977959	12,32	0,544628	0,132445
	16058446			

Figura 6.4: Distribuição de Clientes por *Rating*

Verifica-se que a carteira caracteriza-se por uma concentração de clientes no *rating* B,C+, C, ou seja, existe uma quantidade de clientes superior a 3.794.506 com valores de probabilidade acima do limite suportado pela aproximação logarítmica no modelo CR+. A seguir, analisaremos na Tabela 6.5 e na Figura 6.6, a distribuição de clientes por metodologia de análise de risco.

Metodologia	Quantidade de clientes	%	PD - média	Desvio Padrão - PD
PF	13911843	86,63	0,13	0,19
MPE	255615	1,59	0,07	0,10
EMP	5794	0,04	0,07	0,11
PR	1237740	7,71	0,09	0,12
Outras	647454	4,03	0,22	0,13
Total	16058446	100		

Figura 6.5: Distribuição de Clientes por Metodologia

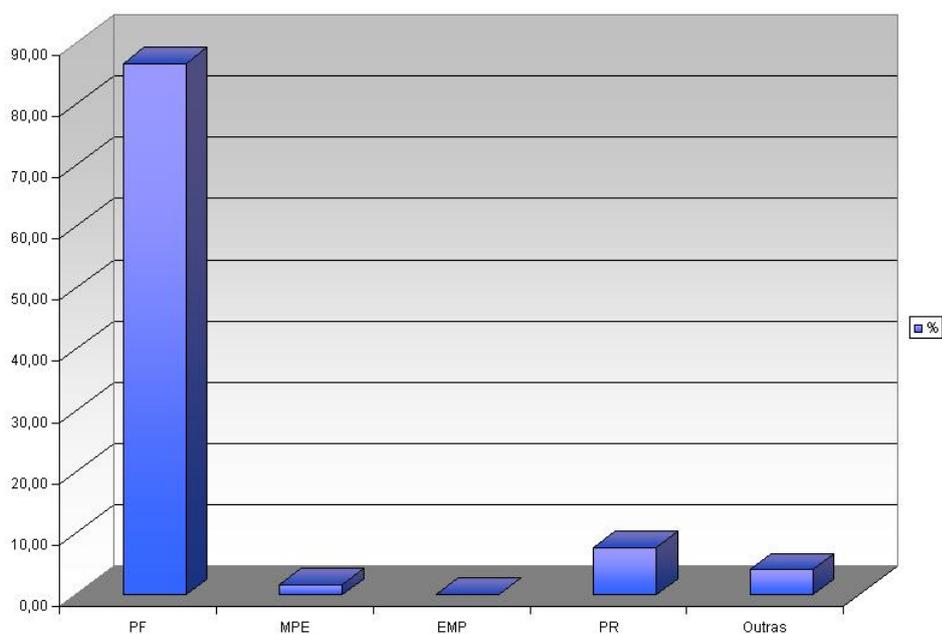


Figura 6.6: Gráfico da Distribuição de Clientes por Metodologia

Podemos observar a grande participação da metodologia que avalia clientes PF com uma PD média acima de 0,09 (Tabela 6.5), essa questão é potencialmente comprometedora para a aproximação logarítmica assumida no modelo original. Contudo, resultados mais detalhados serão apresentados na seção 6.3.

6.2.4 Exposições da Carteira: Bruta e Líquida

Apresentaremos os resultados de EXL e EB, conforme os conceitos apresentados no capítulo 1. Em um primeiro momento, analisaremos a carteira segundo o tipo de pessoa (PF e PJ) (Tabela 6.6 e 6.7).

Tipo de Pessoa	Quantidade de Clientes	%	EXL	%	EB	%
PF	15.746.624	98,06	71.392.137.634	96,55	134.931.275.059	97,10
PJ	311.822	1,94	2.549.517.236	3,45	4.024.494.454	2,90
Total	16.058.446	100	73.941.654.870	100	138.955.769.513	100

Figura 6.7: Distribuição de EXL e EB por Tipo de Cliente

Tipo de Pessoa	EXL Média	EXL Desvio Padrão	EB Média	EB Desvio Padrão
PF	4.533,81	489.918,18	8.568,90	925.946,29
PJ	8.176,19	232.471,39	12.906,38	366.963,51

Figura 6.8: Análise Descritiva da EXL e EB por Tipo de Pessoa

Verifica-se uma considerável diferença da média de EXL de clientes PF e PJ, o que indica uma típica situação de carteira heterogênea. Quando detalhamos a distribuição de EB segundo os percentis de PF e PJ, temos o resultado da Figura 6.9.

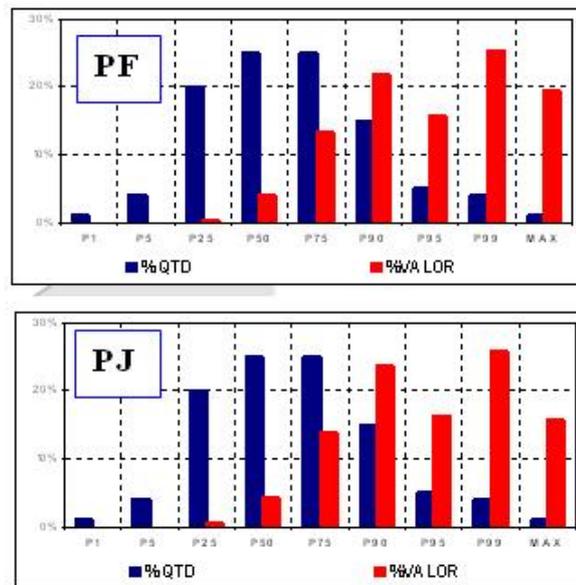


Figura 6.9: Valores de Percentil de EB para PF e PJ

É possível observar uma concentração de EB em pequenos grupos de clientes PJ e PF. Podemos analisar ainda a representatividade da EXL e da EB segundo o *Rating* e a Metodologia de análise de clientes nas Tabelas 6.8 e 6.9.

Rating	Quantidade de Clientes	EL	%	EB	%
AAA	44926	4.059.515.585	5,49	7.663.694.228	5,52
AA	170792	4.634.551.271	6,27	8.743.011.252	6,29
A	444351	3.561.217.176	4,82	6.702.360.186	4,82
B+	1170108	7.310.611.230	9,89	13.763.018.767	9,90
B	2724005	14.445.648.014	19,54	27.175.425.385	19,56
C+	3910383	17.369.287.283	23,49	32.631.837.296	23,48
C	3799375	13.799.896.910	18,66	25.905.416.963	18,64
D	1816547	3.768.369.087	5,10	7.020.675.242	5,05
E	1977959	4.992.558.314	6,75	9.350.330.194	6,73
Total	16058446	73.941.654.870	100	138.955.769.513	100

Figura 6.10: Distribuição de EXL e EB por *Rating*

Metodologia	Quantidade de Clientes	EXL	%	EB	%
PF	13.911.843	54.177.915.654	73,27	102.396.362.982	73,6899
MPE	255.615	1.733.505.994	2,34	2.736.394.624	1,969256
EMP	5.794	382.794.201	0,52	604.252.882	0,434853
PR	1.237.740	16.226.203.182	21,94	30.661.796.340	22,06587
Outras	647.454	1.421.235.840	1,92	2.556.962.685	1,840127
Total	16.058.446	73.941.654.870	100	138.955.769.513	100

Figura 6.11: Distribuição de EXL e EB por Metodologia

Destaca-se a representatividade dos *ratings* B,C+ e C, observando ainda que os riscos D e E representam 11,85% da EXL e 11,78% da EB, o que sugere que, a título de preservação da hipótese de aproximação logarítmica do modelo, esses clientes podem ser admitidos como perda observada (determinística), efetuando-se valor de provisão de recursos na dimensão da EXL desses clientes. As metodologias PF e PR concentram uma grande quantidade de clientes e apresentam uma elevada PD média. Vale ressaltar que a ausência de grandes empresas (corporates) nessa análise resulta em uma pequena representatividade da metodologia EMP.

Com a finalidade a ser trabalhada na seção 6.4, apresentaremos ainda a média, mediana e o intervalo interquartilico da EXL na Tabela 6.10.

Medidas	Valores
EXL Média	4604,36
EXL Mediana	617,21
EXL Intervalo Interquartilico	2156,01

Figura 6.12: Algumas Medidas de EXL

6.3 Análise do Efeito do Número de Faixas, Aproximação Logarítmica e Alternativas

Iniciaremos a seção apresentando os resultados obtidos para o modelo padrão (100 faixas de exposição, $\sigma_A^2 = PD/2$ com $n_{it} = 100000$ ou percentil máximo de 0,99998). Teremos nessas condições a distribuição binomial negativa composta (conforme a seção 2.4) da perda agregada conforme a Figura 6.13.

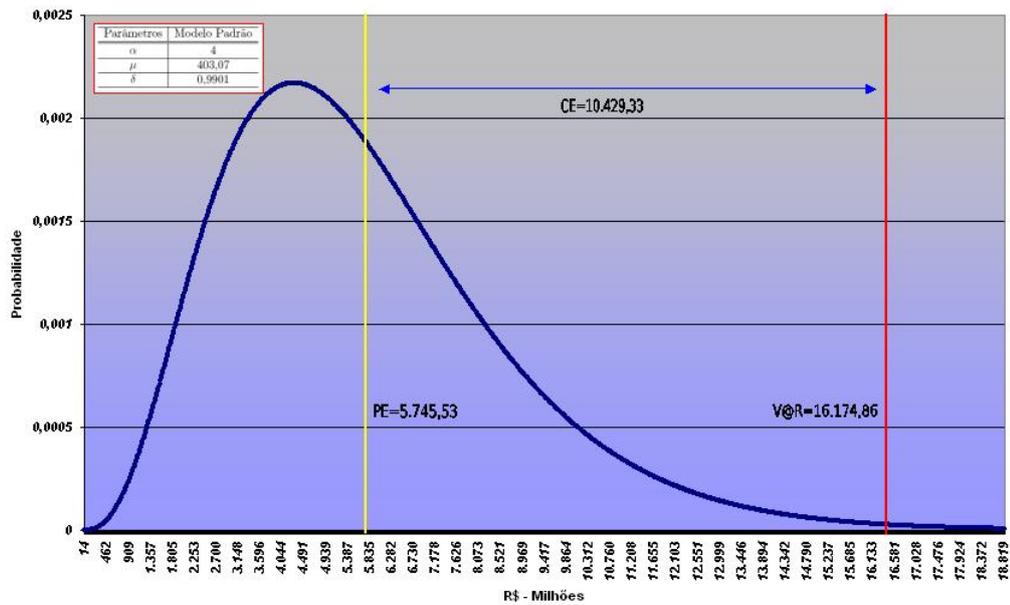


Figura 6.13: V@R Modelo Padrão

Podemos observar, pela Figura 6.4, que a probabilidade de ocorrer uma perda de cinco bilhões e setecentos milhões de reais (aproximadamente o valor de PE), é de pouco mais de 0,0018 (ou 0,18%) em uma carteira de crédito de cento e trinta e oito bilhões de reais de exposição bruta (conforme a seção 6.2.4). Desta forma, o banco em questão possui uma perda máxima, para um nível de confiança de 0,995 (ou 99,5%), no horizonte de um ano, no valor de R\$ 16.174 bilhões. Temos então, que para se resguardar de perdas inesperadas (CE), deve manter ativos (em geral de maior liquidez) provisionados de R\$ 10.429 bilhões.

Conforme apresentado no capítulo três, o número de faixas possui grande impacto sobre a estimação do V@R. Podemos analisar esse efeito por meio da estimação de V@R com 25 e 300 faixas comparado ao modelo padrão (Figuras 6.14 e 6.15).

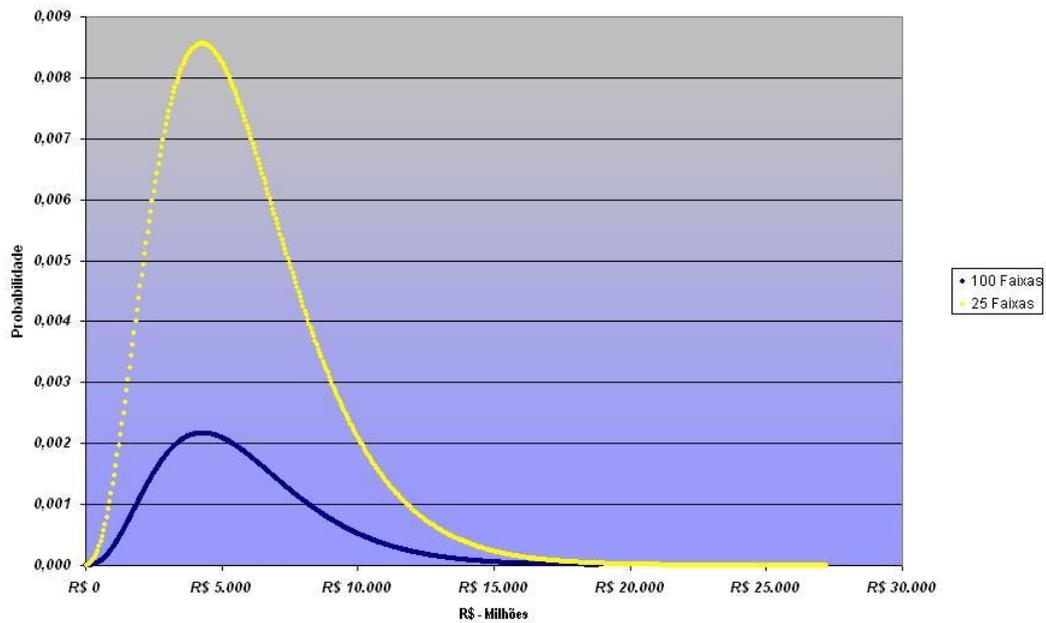


Figura 6.14: CE com 100 e 25 faixas de Exposição

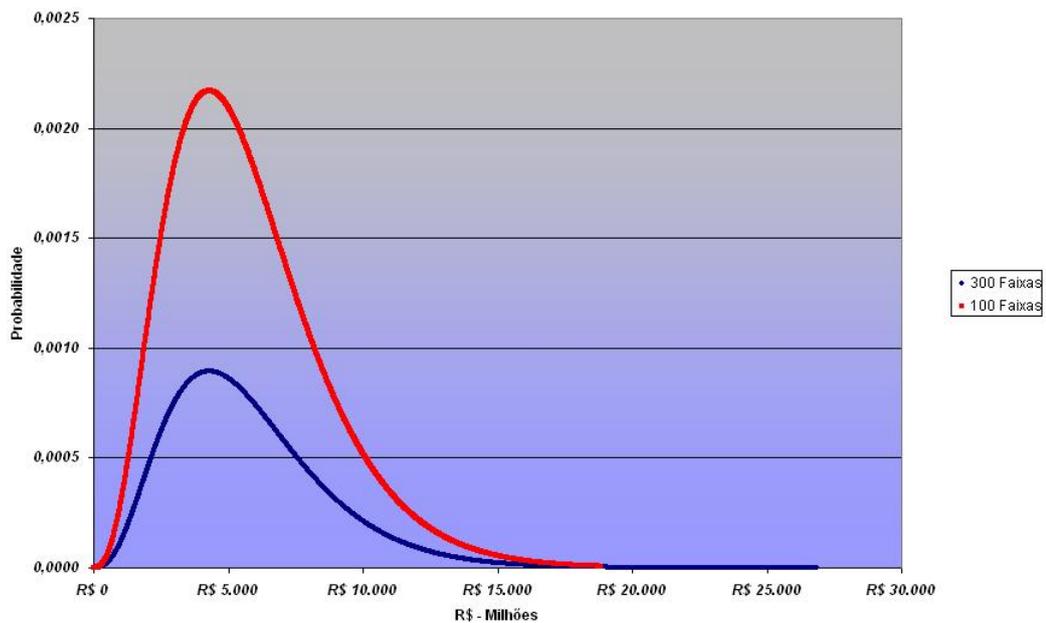


Figura 6.15: CE com 300 e 100 faixas de Exposição

Analisando a Tabela 6.11, gerada por meio dessas estimações, para um V@R com percentil comparável (0,9958), o número máximo esperado de *defaults* para 300 faixas no período de um ano é 2809 *defaults*, enquanto para 100 faixas é de 1156 *defaults*, e de 291 *defaults* para 25 faixas. Contudo, essa menor frequência para um número pequeno de faixa possui maior severidade. Evidentemente que, em uma

carteira de crédito com 16 milhões de clientes, espera-se, na prática, um número bem superior a 291 inadimplentes. Mesmo entre clientes pessoa jurídica, tal severidade somente seria justificável se hipoteticamente esses 291 *defaults* fossem de clientes de grande exposição. Contudo, a dinâmica de limites de crédito libera maiores valores de exposição justamente para clientes de menor probabilidade de *defaults*, o que mostra como a distribuição de perda agregada pode ser viesada para um número pequeno de faixas, mesmo que isso represente um menor esforço computacional.

Tabela 6.11 - Comparativo de V@R com 25,100 e 300 Faixas de Exposição

25 Faixas			100 Faixas			300 Faixas		
Número de Default	Valor	Percentil	Número de Default	Valor	Percentil	Número de Default	Valor	Percentil
283	15.839,06	0,9947	1148	16.062,93	0,9956	2801	16.093,24	0,9957
284	15.895,03	0,9949	1149	16.076,93	0,9956	2802	16.098,98	0,9957
285	15.951,00	0,9950	1150	16.090,92	0,9957	2803	16.104,73	0,9958
286	16.006,97	0,9952	1151	16.104,91	0,9957	2804	16.110,47	0,9958
287	16.062,93	0,9953	1152	16.118,90	0,9957	2805	16.116,22	0,9958
288	16.118,90	0,9954	1153	16.132,89	0,9958	2806	16.121,97	0,9958
289	16.174,87	0,9956	1154	16.146,89	0,9958	2807	16.127,71	0,9958
290	16.230,84	0,9957	1155	16.160,88	0,9958	2808	16.133,46	0,9958
291	16.286,81	0,9958	1156	16.174,87	0,9959	2809	16.139,20	0,9958
Range -U	55,97		Range -U	13,99		Range -U	5,75	

R\$ - Milhões

Figura 6.16: Comparativo de CE com 25,100 e 300 faixas de Exposição

Podemos observar pela Figura 6.17, que para um mesmo valor de perda agregada (cinco bilhões, por exemplo), apesar de os valores dos parâmetros serem os mesmos para os três casos, a probabilidade de ocorrência de tal valor é diferente para diferentes faixas.

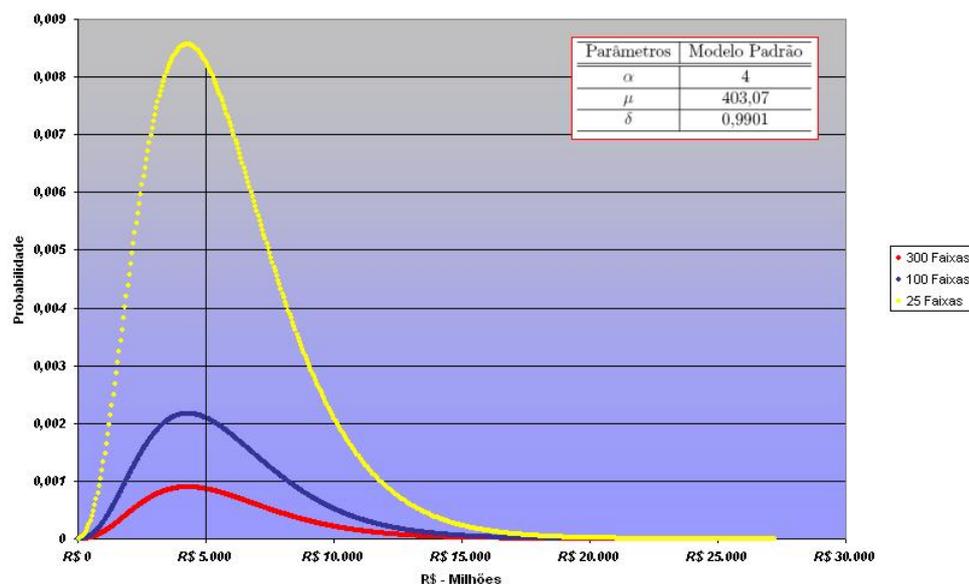


Figura 6.17: Comparativo de V@R com 25, 100 e 300 Faixas de Exposição

A probabilidade de uma perda agregada no valor de cinco bilhões é de pouco mais de 0,002 (ou 0,2%) para um modelo com 100 faixas (modelo padrão). Este mesmo valor em um modelo com 25 faixas, é de 0,008 (ou 0,8%), quatro vezes maior que a probabilidade do modelo padrão. Para o modelo com 300 faixas, essa probabilidade é de 0,0008 (ou 0,08%). Isso ocorre pelo fato de que em um modelo com maior número de faixas, a quantidade de clientes em um determinado valor é menor do que em um modelo com número de faixas menor, ou seja, a probabilidade conjunta torna-se menor para um determinado valor, a medida em que o número de faixas aumenta.

Um segundo ponto analisado nessa seção diz respeito ao comparativo entre o modelo padrão de V@R e um V@R estimado de modo a ser válida a aproximação logarítmica. Conforme apresentado na seção 3.2, foi possível observar que valores de PD acima de 0,09 começam a comprometer a aproximação logarítmica. Desse modo, assumindo esse valor como limite e separando os clientes, estimamos o V@R com as mesmas premissas do modelo padrão. Teremos o número original de clientes de 16.058.446 reduzido para 10.158.767, obtendo a seguinte distribuição de perda agregada na Figura 6.18.

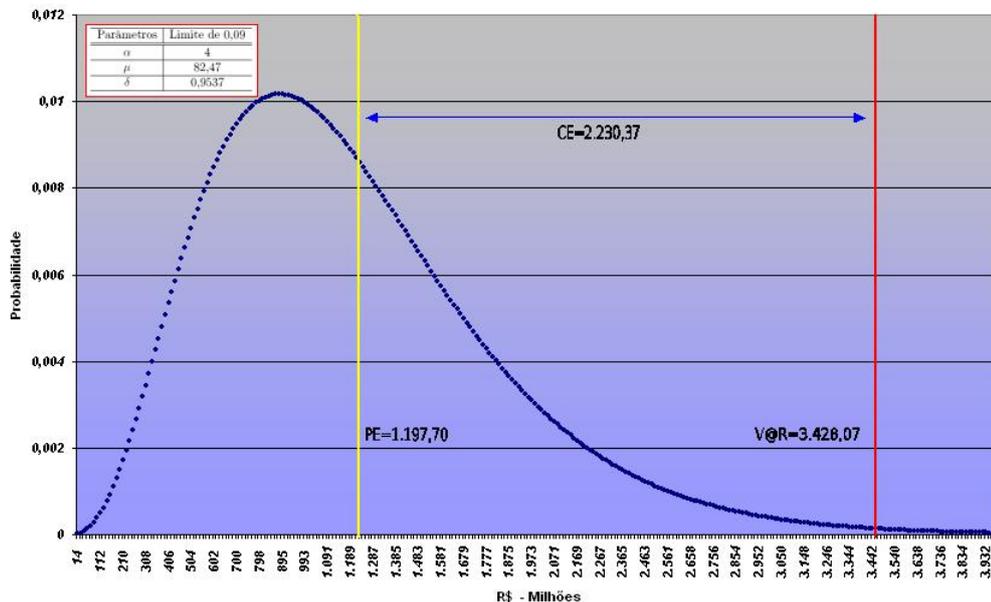


Figura 6.18: CE com PD menores que 0,09

ANC	Quantidade de Clientes - 0,09	Quantidade de Clientes	EXL-0,09	%	EXL	%
PF	9.030.710	13.911.843	43.621.112.727	75,12	54.177.915.654	73,27
MPE	193.497	255.615	1.417.424.539	2,44	1.733.505.994	2,34
EMP	4.396	5.794	158.016.277	0,27	382.794.201	0,52
PR	825.496	1.237.740	12.264.092.103	21,12	16.226.203.182	21,94
Outras	104.668	647.454	611.564.653	1,05	1.421.235.840	1,92
Total	10.158.767	16.058.446	58.072.210.299	100	73.941.654.870	100

Figura 6.19: EXL com PD menores que 0,09 por Metodologia

Podemos, na Tabela 6.12, observar uma redução mais acentuada de clientes PF e PR. Comparamos agora os valores estimados de V@R para o limite de PD de 0,09 e o modelo padrão (Tabela 6.13 e na Figura 6.21).

PD até 0,09			Modelo Padrão		
Número de Default	Valor	Percentil	Número de Default	Valor	Percentil
237	3.316,13	0,9946	1148	16.062,93	0,9956
238	3.330,12	0,9948	1149	16.076,93	0,9956
239	3.344,11	0,9949	1150	16.090,92	0,9957
240	3.358,10	0,9951	1151	16.104,91	0,9957
241	3.372,10	0,9953	1152	16.118,90	0,9957
242	3.386,09	0,9954	1153	16.132,89	0,9958
243	3.400,08	0,9956	1154	16.146,89	0,9958
244	3.414,07	0,9957	1155	16.160,88	0,9958
245	3.428,07	0,9959	1156	16.174,87	0,9959
<i>Range - U</i>	13,99		<i>Range - U</i>	13,99	

R\$ - Milhões

Figura 6.20: Comparativo CE com PD menores que 0,09

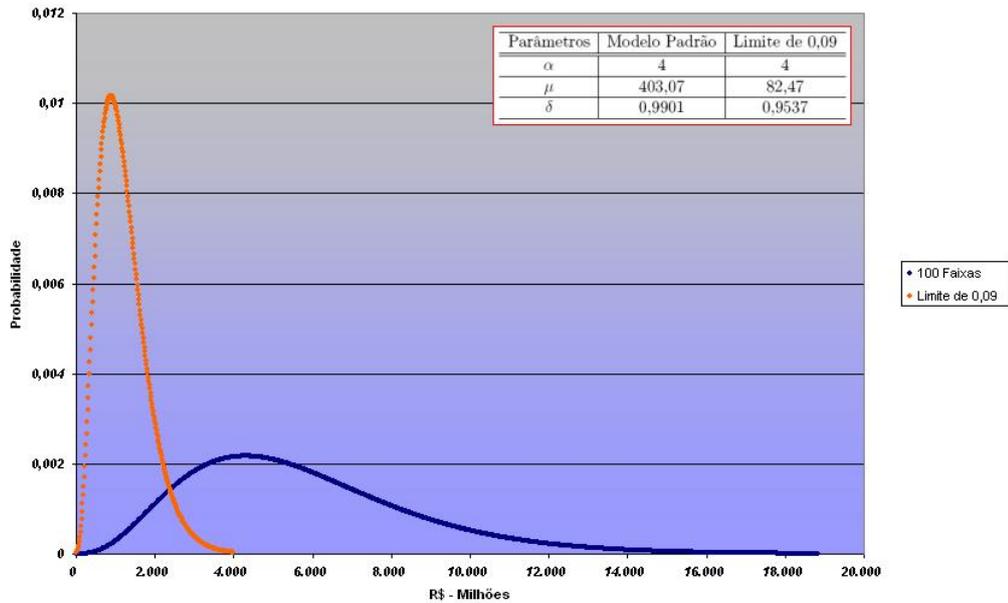


Figura 6.21: Comparativo V@R com PD menores que 0,09

Existe, portanto, uma significativa redução de V@R quando considerados os limites da aproximação logarítmica, que é base do desenvolvimento teórico do modelo CR+. Contudo, essa alternativa deve considerar os impactos nos valores de provisão que serão repassados via apreçamento das operações de crédito. De acordo com o cenário do mercado de crédito, essa opção pode se tornar inviável.

Em termos de parâmetros (apresentados em 2.25 e 2.19), a redução do número de clientes faz com que o valor do parâmetro μ caia, reduzindo o valor do parâmetro δ , mesmo permanecendo constante o valor de α . Tanto a redução de CE quanto de PE para a carteira de crédito em questão e para o período analisado, tem um contra-ponto de aumento de perda determinística (ou perda observada), da ordem de quinze bilhões (diferença entre PE no modelo padrão e PE no modelo com limite). Diferente do valor de V@R, que exige ativos mais líquidos no valor de seu montante, a provisão de uma perda considerada pelo banco como observada, imobiliza o valor de provisão de maneira que tal montante não pode ser utilizado em outras operações financeiras, no caso de não ocorrer tal perda, ou, se for apenas parte dela, torna-se no próximo período uma reversão de crédito. Muito embora um modelo com limite seja mais conservador, este impõe impactos sobre a rentabilidade do banco.

6.4 Análise de Heterogeneidade da Carteira e Alternativas

Apresentaremos nessa seção as sugestões de escolha de B (número de faixas) que correspondam às medidas descritivas de EXL apresentadas na seção 6.1. Como o número de faixas aumenta de maneira acentuada, a performance computacional passa a ser relevante para a implementação de uma rotina periódica de cálculo de V@R.

Tabela 6.14 - Análise de V@R para Número de Faixas Correspondentes a Medidas Exploratórias

Modelo	B	n_{it} - Utilizado	Tempo de Processamento - Horas	Número de Default	Valor - R\$ Milhões	Percentil	Range - U
Padrão	100	1.346	2 h 47 min	1.156	16.174,89	0,9959	13.992,103
Média	303.880	4.076.764	7 h 15 min	3.497.981	16.108,20	0,9958	4.604
Intervalo Interquartilico	648.984	8.703.377	12 h 02 min	7.467.589	16.107,58	0,9958	2.156
Mediana	2.176.505	23.597.981	41 h 21 min	22.974.987	14.180,39	0,9957	617

Figura 6.22: Análise de V@R para Número de Faixas Correspondentes a Medidas Exploratórias

Uma importante questão refere-se à convergência numérica do algoritmo recursivo de Panjer para um número de faixas muito grande. Estimativas do número de *default* podem superar o número de clientes da base. Isso ocorre porque o número de iterações necessárias para o atingimento de determinado percentil pode apresentar um acúmulo de erro numérico, conforme apresentado na seção 3.3, 3.6 e no capítulo 5 (exemplo numérico). Esse efeito foi constatado quando utilizamos um número de faixas correspondentes ao valor da mediana da EXL, conforme destacado na Tabela 6.14. Observamos uma redução da quantidade de clientes por faixa conforme o *range* de cada faixa assume menores valores: decaí de 16 milhões de clientes do modelo padrão para 8 milhões considerando um *range* da dimensão da mediana da EXL, como mostra a Figura 6.23.

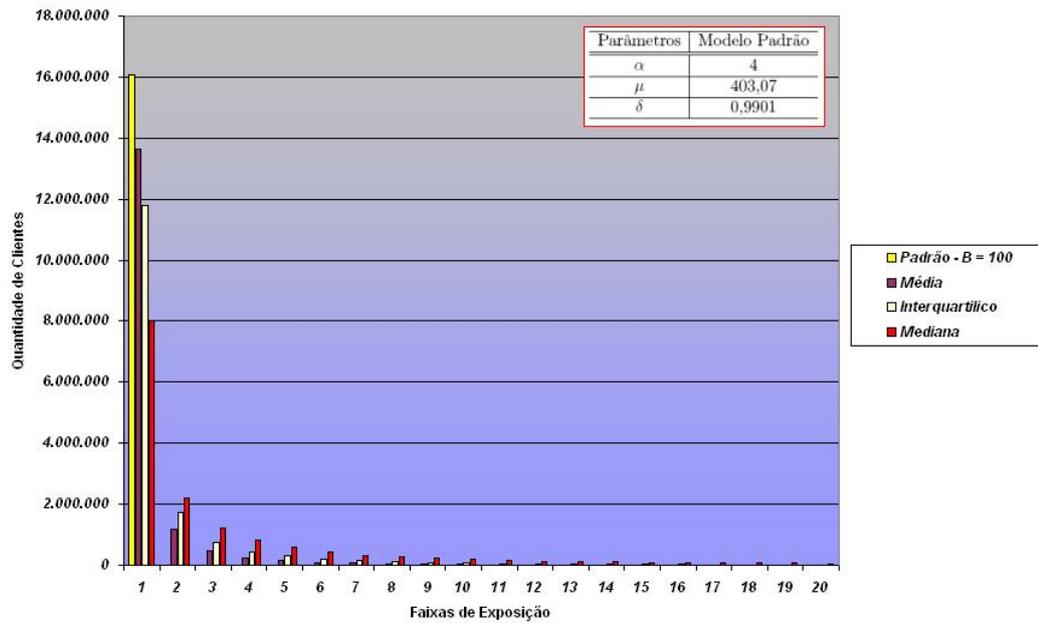


Figura 6.23: Análise da Quantidade de Clientes por Faixa de Exposição para Diferentes Valores de *Range*

Essa evidência deixa clara a limitação do algoritmo de Panjer para aproximar as exposições discretizadas das verdadeiras exposições. Portanto, o modelo CR+ conforme seu formato original pode apresentar resultados prejudicados de V@R e consequentemente de CE para carteiras de crédito com exposições discrepantes (ou *outliers*), ou para carteiras com clientes PF e PJ caracterizados por exposições heterogêneas.

Apresentamos a seguir a estimação da distribuição de perda agregada separadamente por tipo de pessoa. Essa separação tem caráter arbitrário e *ad hoc*, e atende somente a propósitos ilustrativos, pois a definição de setores com essas peculiaridades pede outros tipos de análises. Apenas a título de teste da propriedade de subaditividade no V@R, temos as seguintes distribuições da Figura 6.24.

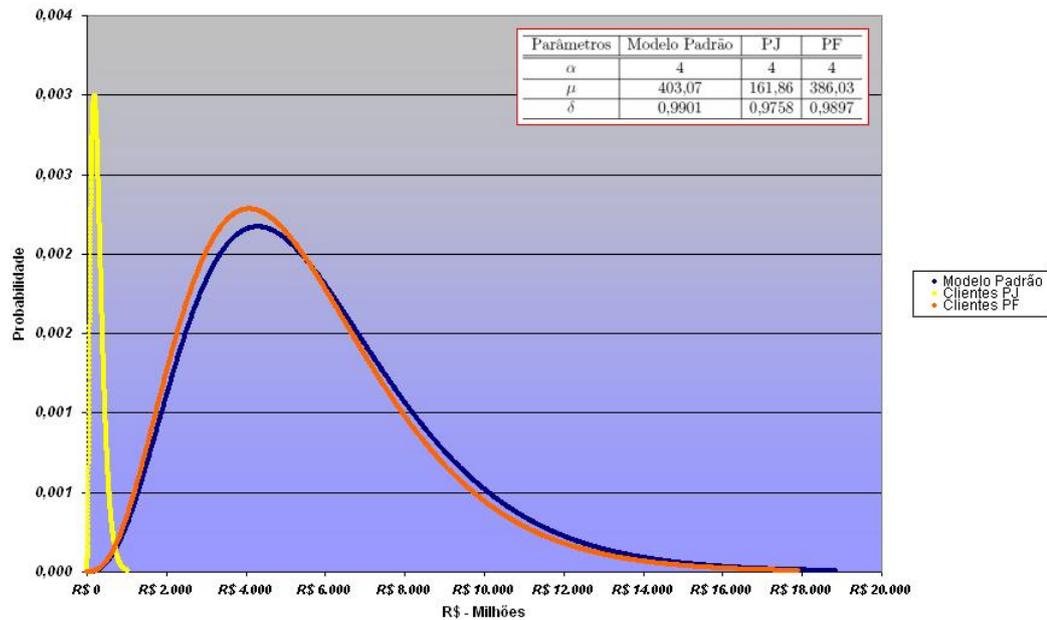


Figura 6.24: Comparativo de V@R por Tipo de Pessoa

Tabela 6.15 - Valores Comparativos de V@R por Tipo de Pessoa

PF			PJ			Padrão			PF+PJ
Número de Default	Valor - Milhões	%	Número de Default	Valor - Milhões	%	Número de Default	Valor - Milhões	%	valor
1092	15.279,38	0,9956	827	860,71	0,9956	1150	16.090,92	0,9957	16.140,08
1093	15.293,37	0,9957	828	861,75	0,9956	1151	16.104,91	0,9957	16.155,12
1094	15.307,36	0,9957	829	862,79	0,9957	1152	16.118,90	0,9957	16.170,15
1095	15.321,35	0,9957	830	863,83	0,9957	1153	16.132,89	0,9958	16.185,18
1096	15.335,34	0,9958	831	864,87	0,9957	1154	16.146,89	0,9958	16.200,21
1097	15.349,34	0,9958	832	865,91	0,9958	1155	16.160,88	0,9958	16.215,25
1098	15.363,33	0,9958	833	866,95	0,9958	1156	16.174,87	0,9959	16.230,28

Figura 6.25: Valores Comparativos de V@R por Tipo de Pessoa

Podemos observar, na Tabela 6.15, para essa base de clientes nesse período (janeiro de 2009) que em nenhum percentil considerado o $V@R_{padr\tilde{a}o} > V@R_{PF+PJ}$. A distribuição de perda agregada de clientes PF é muito próxima da distribuição do modelo padrão. Por outro lado, o valor de V@R de clientes PJ apresenta valor significativamente menores do que do V@R padrão. Isso ressalta a característica de varejo, ou seja, atendimento de um grande número de clientes que são consumidores finais do crédito, como os clientes PF e alguns clientes PJ do banco em questão (conforme também pode ser visto nas Tabelas 6.7 e 6.9).

O modelo CR+ ainda assim é apropriado para estimar o V@R dessa carteira, mesmo na presença de heterogeneidade das exposições (que se reflete nas diferentes formas das distribuições na Figura 6.24), a perda de acurácia ocorre em maior intensidade no uso do algoritmo recursivo de Panjer, como será apresentado na seção

6.6.

6.5 Simulação da Volatilidade da Taxa de *Default* e Exigência de Capital Regulatório

Nesta seção, apresentaremos estimativas de V@R para diferentes sugestões da literatura (ver Gordy [29], Balzarotti *et al.* [7,8], CSFP [21] e Schechtman *et al.* [59]) para o valor da volatilidade da taxa de *default*, além de uma estimativa de V@R utilizando valor estimado de volatilidade por meio do método de máxima verossimilhança (a partir dos parâmetros da distribuição Gama do modelo). Teremos, então os seguintes valores de simulação da volatilidade da taxa de *default* (considerando inalteradas as hipóteses do modelo padrão⁴ Tabela 6.16).

Tabela 6.16 - Valores de Volatilidade para Simulação de V@R

Sugestão	Valores de Volatilidade da Taxa de Default
Schechtman	0,2
Balzarotti	0,3
Schechtman, Balzarotti	0,4
Gordy, CSFP, Balzarotti, Schechtman (Modelo Padrão)	0,5
Schechtman	0,6
Schechtman	0,8
Schechtman	0,9
Schechtman, CSFP	1
Schechtman	1,1
Schechtman	1,2
Estimativa via EMV	1,68

Figura 6.26: Valores de Volatilidade para Simulação de CE

Apresentaremos primeiramente as estimativas obtidas via máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gama⁵:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\sigma}}}{\sigma^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

⁴Todas as simulações seguem as mesmas premissas: B=100, $n_{it}=100000$ ou percentil máximo de 0,99998. Isso com a finalidade de comparação com o modelo padrão, apresentado na seção 6.3.

⁵Nos resultados apresentados a seguir, o parâmetro de escala β , utilizado em todo desenvolvimento apresentado do capítulo 2, chama-se sigma nos *outputs* do aplicativo SAS.

The CAPABILITY Procedure
Fitted Gamma Distribution for PD

Parameters for Gamma Distribution		
Parameter	Symbol	Estimate
Threshold	Theta	0
Scale	Sigma	0.217598
Shape	Alpha	0.594309
Mean		0.12932
Std Dev		0.16775

Goodness-of-Fit Tests for Gamma Distribution					
Test	Statistic		DF	p Value	
Wald	Chi-Sq	5552278.39	331	Pr > Chi-Sq	<0.001

Figura 6.27: Valores Estimados dos Parâmetros da Distribuição Gama via EMV

Como rejeitamos a hipótese pelo teste de Wald⁶ de que os valores dos parâmetros tenham valor zero, temos, portanto, conforme apresentado na seção 3.5, que o valor de σ_A^2 será:

$$\sigma_A^2 = p_A \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\frac{\sigma_k^2}{\mu_k^2}} = p_A \frac{(0,16775)^2}{(0,12932)^2} = p_A \frac{1}{0,5943} \Rightarrow \sigma_A^2 = p_A \times 1,6826.$$

No modelo CR+, a medida em que alteramos os valores da volatilidade da taxa de *default*, o valor dos parâmetros α e δ também se alteram, o que resulta em nova forma para a distribuição. Contudo, o valor do parâmetro μ permanece inalterado (parâmetros referentes a 2.25 e 2.19). Teremos, portanto, as seguintes distribuições para os valores sugeridos de volatilidade, apresentados nas Figuras 6.28 à 6.31.

⁶No teste de Wald, basicamente, o valor da estimativa do parâmetro de interesse θ com um valor proposto θ_0 , supõe que esta diferença tenha distribuição normal e o quadrado desta diferença terá distribuição qui-quadrada. Para detalhes, ver Mood *et al.* [50].

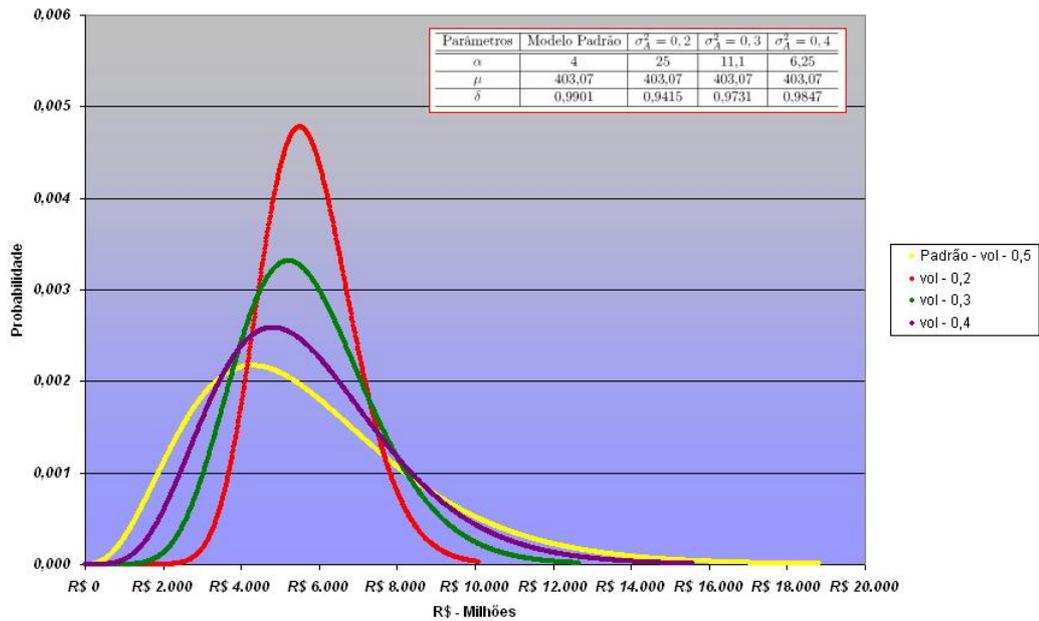


Figura 6.28: Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades 0,5; 0,2; 0,3; 0,4

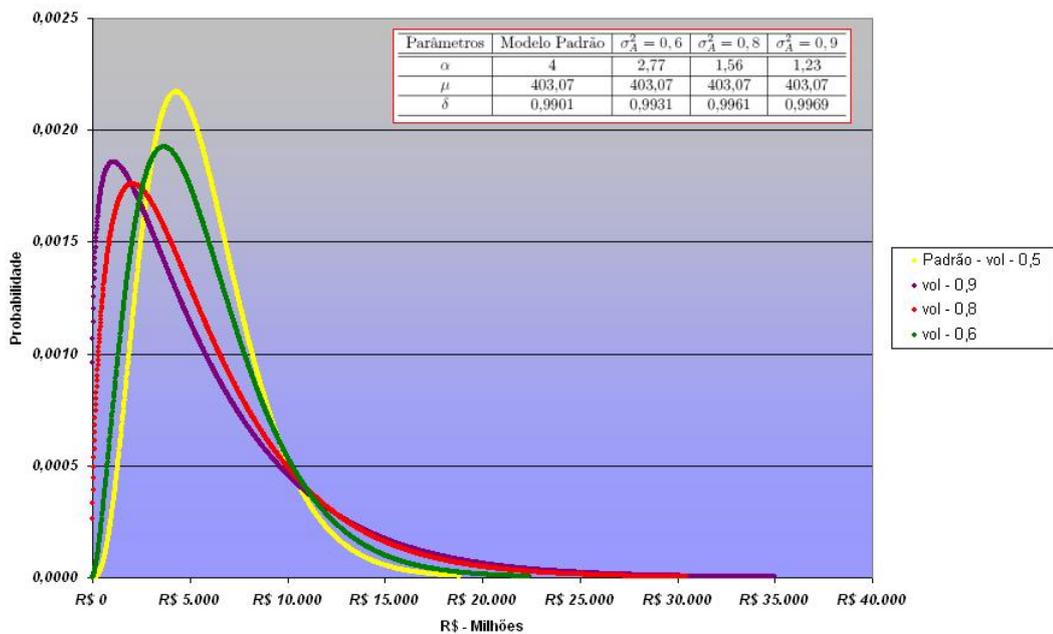


Figura 6.29: Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades 0,5; 0,6; 0,8; 0,9

À medida que o valor da volatilidade aumenta para esse conjunto de dados, o valor de V@R também aumenta, contudo não ultrapassa os valores de $CER = 85.173,98$ milhões de reais (conforme mostra a Tabela 6.17) estimados para o mesmo conjunto de clientes, e portanto não se verificam para esse banco os efeitos apresentados em Schechtman *et al.*[59], onde, para alguns bancos, os valores de V@R ultrapassavam o

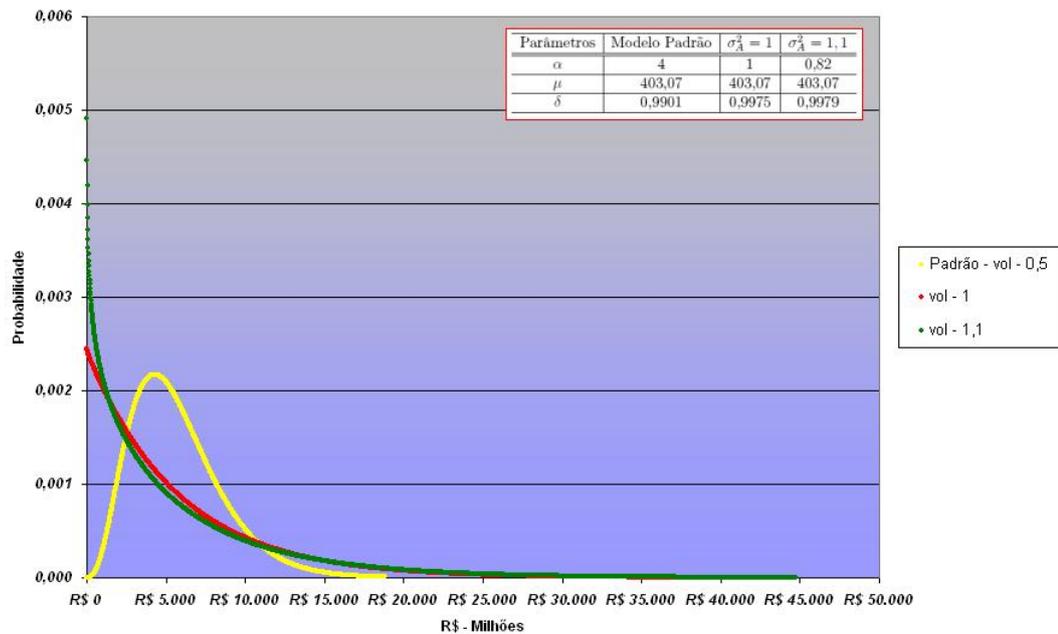


Figura 6.30: Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades: 0,5; 1 e 1,1

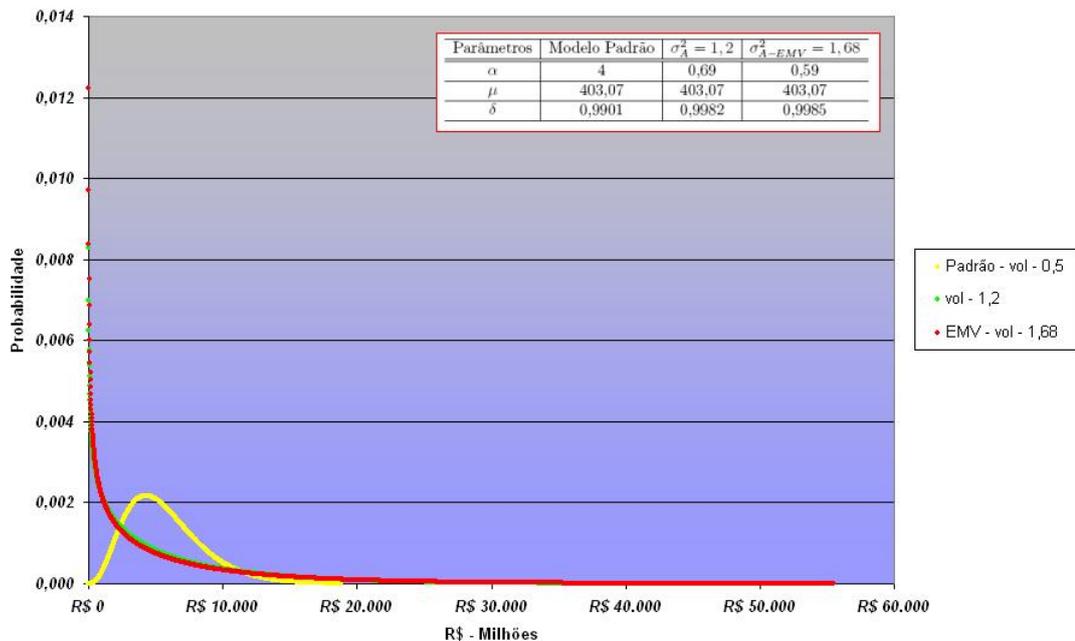


Figura 6.31: Comparação entre Valores de V@R para Volatilidades: 0,5; 1,2 e 1,68

valor de CER à medida que o valor de volatilidade aumentava.

Podemos observar também que, à medida em que a volatilidade atinge valores acima de 1, a distribuição de perda agregada passa a ter distribuição exponencial. Estes resultados confirmam o comportamento de cauda da distribuição de perda agregada apresentadas na seção 4.4, o que permite a utilização do método de diagnóstico

Valores de Simulação da Volatilidade da Taxa de Default	Valor em Risco	PE	CE	Número de Default	CER
0,2	9.346,72		3.601,19	668	
0,3	11.389,57		5.644,04	814	
0,4	13.670,28		7.924,75	977	
0,5	16.174,87		10.429,34	1.156	
0,6	18.889,34		13.143,81	1.350	
0,8	24.821,99	5.745,53	19.076,46	1.774	85.173,98
0,9	28.082,15		22.336,62	2.007	
1	31.482,23		25.736,70	2.250	
1,1	35.036,23		29.290,70	2.504	
1,2	38.744,13		32.998,60	2.769	
1,68	42.480,02		36.734,49	3.036	

Obs: Valores de CE para um mesmo percentil (0,995). Valores em Milhões. B=100 e U=13.992.103

Figura 6.32: Valores de CE para Diferentes Volatilidades

para verificação de resultados no modelo CR+.

6.6 Resultados Comparativos da Estimação de V@R: Recursividade de Panjer e Aproximações Ponto de Sela

Apresentaremos primeiramente os resultados comparativos de performance da estimação via recursividade de Panjer e pelo método de aproximações ponto de sela (Tabela 6.18).

Modelo	B	n_A - Utilizado	Tempo de Processamento - Horas	Número de Default	Valor - R\$ Milhões	Percentil	Range - U
Panjer - Modelo Padrão	100	1.346	2 h 47 min	1.156	16.174,89	0,9959	13.992.103
Aproximações Ponto de Sela	100	-	17 min	1.058	14.806,39	0,9958	13.992.103
Aproximações Ponto de Sela - Mediana	2.176.505	-	18 min	4.421.351	14.002,89	0,9958	617
Aproximações Ponto de Sela - Sem Discretização	16.058.446	-	22 min	7.512.354	13.215,65	0,9958	1

Figura 6.33: Comparativo de Performance na Estimação de CE via Aproximações Ponto de Sela

Podemos verificar a enorme eficiência computacional de estimação pelo método de aproximações ponto de sela, mesmo considerando o número máximo de faixas de exposição (B =número total de clientes), o tempo de processamento é consideravelmente menor (22 minutos) do que no modelo padrão (2 horas e 47 minutos). Outro aspecto relevante diz respeito ao valor de $V@R$ estimado pelo método de aproximações ponto de sela. Quando consideramos o modelo sem discretização, obtivemos um valor representativamente menor. Quando utilizamos no método aproximações ponto, de sela um procedimento de discretização a fim de obter comparações com o modelo padrão estimado via recursividade de Panjer, ainda observamos um menor valor de $V@R$.

Os valores de ponto de sela para a estimação de $V@R$, considerando um número de faixas de exposição de $B = 100$, foi de $Z \in (0; 0,009693)$. Foi gerada uma sequência com quatro casas decimais depois da vírgula resultando em 82 pontos dentro do intervalo. Para cada ponto, foram calculados os respectivos valores de \hat{w} , \hat{u} e \hat{n} , e utilizando a aproximação de Lugananni-Rice conforme (4.17), obtivemos as estimativas de probabilidade associada a cada \hat{n} estimado. Apresentamos na Tabela 6.19 o trecho de valores contendo o valor de $V@R$ considerado⁷.

Tabela 6.19 - Tabela de Amostra de Valores Estimados pelo Método de Aproximações Ponto de Sela							
U	Z	Número de Default	\hat{w}	\hat{u}	1-GN	%	$V@R$ - Milhões
13.992.103	0,0062	986	2,59	3,54	0,00631	0,9937	13798,74
	0,0063	995	2,61	3,71	0,00595	0,9940	13917,19
	0,0064	1.004	2,64	3,88	0,00561	0,9944	14042,85
	0,0065	1.013	2,67	4,07	0,00529	0,9947	14176,40
	0,0066	1.023	2,69	4,26	0,00498	0,9950	14318,59
	0,0067	1.034	2,72	4,47	0,00469	0,9953	14470,31
	0,0068	1.046	2,75	4,69	0,00441	0,9956	14632,53
	0,0069	1.058	2,77	4,93	0,00415	0,9959	14806,40

Figura 6.34: Tabela de Amostra de Valores Estimados pelo Método Aproximações Ponto de Sela

⁷As estimativas para os valores considerados no intervalo são apresentados no apêndice E

Analisaremos por meio da razão de perda ($R = \frac{V@R_q}{EB_{total}}$) o comportamento de cauda da distribuição de perda agregada estimada pelo dois métodos (Figura 6.35).

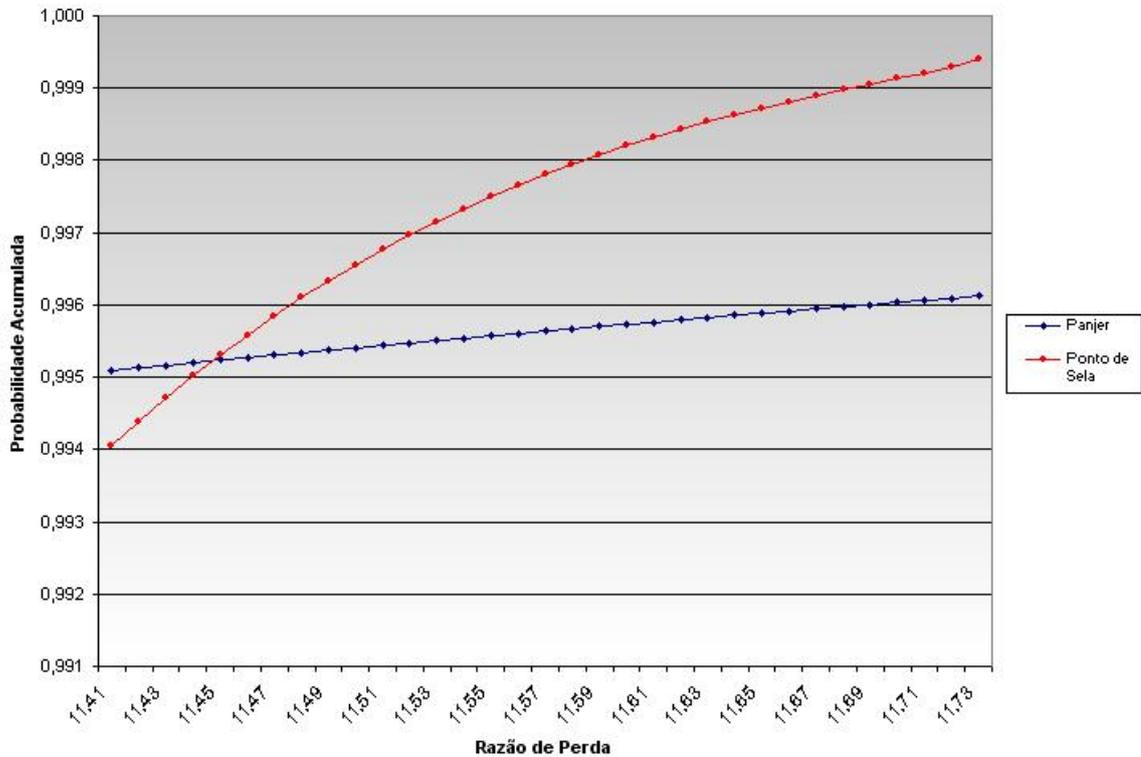


Figura 6.35: Comportamento de Cauda da Distribuição de Perda Agregada - Comparativo de Métodos

Verifica-se que a probabilidade acumulada aproxima-se vagarosamente, na recursividade de Panjer, de 1, enquanto essa aproximação é rápida para o método de aproximações ponto de sela, o que torna evidente os efeitos da propagação de erros numéricos e o comportamento exponencial da cauda da distribuição de perda agregada no modelo CR+ (conforme Haaf *et al.* [30]). Apresentaremos agora, na Tabela 6.20, os resultados do método de verificação para os modelos apresentados na seção 5.4, comparativamente, por meio do erro relativo absoluto (ERA). Para analisarmos o comportamento de cauda da distribuição de perda agregada para esses modelos, o ERA foi calculado para cada modelo a partir do percentil 0,95 até o percentil de cálculo do $V@R_q$, ou seja, $q \in [0, 95; q]$. Ainda na Tabela 6.20, apresentaremos o valor médio do ERA e o maior ERA para cada modelo.

Modelo	B	ERA - Média	ERA - Max
Padrão	100	1,02	1,75
Média	303.880	3,12	3,91
Intervalo Interquartilico	648.984	4,42	5,01
Mediana	2.176.505	6,52	8,12

OBS: Os valores do Erro Relativo Absoluto são expressos em percentual

Figura 6.36: Erro Relativo Absoluto para Modelos Estimados via Recursividade de Panjer

Podemos observar que, à medida que a exposição discretizada se aproxima da exposição real do devedor, o erro relativo absoluto aumenta, sendo que para o modelo estimado via recursividade de Panjer, considerando um número de faixas equivalente a um *range* de dimensão da mediana, os erros já apresentavam grandes desvios da aproximação da cauda da distribuição de perda agregada, conforme o método apresentado na seção 4.4.

A evidência, apresentada nas diferente forma das distribuições na Figura 6.24, da presença de heterogeneidade das exposições da carteira (como também pode ser visto nas Tabelas 6.5 e 6.7), indica que o uso do método de aproximações ponto de sela pode estar comprometido em termos de acurácia, segundo Annaert *et. al.* [1]. Contudo, seus resultados de performance computacional e eliminação do processo de discretização, são válidos. Vale ressaltar que, em condições de heterogeneidade das exposições da carteira, tanto o algoritmo de Panjer quanto o método de aproximação de ponto de sela são penalizados com alguma perda de acurácia, sendo que, o método de aproximações ainda assim estima valores de $V@R$ sem a necessidade de discretização das exposições, que é um outra grande fonte de viés.

Conclusão

Em comparação com os mais conhecidos e competitivos modelos de risco de crédito, o modelo CreditRisk+ é especialmente parcimonioso. O cálculo da perda agregada por meio de sua fórmula analítica de recursividade é computacionalmente muito mais rápido, eficiente e acurado do que os modelos baseados em simulações de Monte Carlo. Todavia, o cálculo da perda agregada ainda assim não é direto. Outro ponto relevante é o fato de que o algoritmo recursivo de Panjer apresenta instabilidade numérica potencialmente danosa às estimativas de $V@R$ e conseqüentemente de CE, em especial para carteiras de crédito com uma grande quantidade de clientes.

Essas e outras fragilidades no modelo CR+ utilizando a recursividade de Panjer foram apresentadas e evidenciadas com o uso de uma base de dados reais de clientes, sendo que a particularidade do presente estudo em relação aos resultados apresentados em outras publicações está no fato de que essa base possui um grande número de clientes e pode, portanto, elucidar questões práticas da implementação do modelo CR+.

Foi apresentada neste estudo uma alternativa vantajosa em termos de performance de processamento e do processo de discretização, para o algoritmo de recursividade de Panjer: o método de aproximações ponto de sela. Esse método apresentou respostas para as maiores fragilidades apresentadas no modelo CR+ clássico, seguindo os resultados encontrados na literatura. Primeiro, é um procedimento computacional extremamente rápido e eficiente, não dependendo do número de clientes da carteira de crédito, ou do número de setores ou ainda do processo de discretização das exposições individuais. Segundo, os resultados apresentam convergência com o estudo de Gordy [29], ou seja, o método apresenta grande acurácia para grandes carteiras

como pode ser verificado por meio do método de verificação de resultados apresentado no capítulo 6 utilizando dados reais. Contudo, o método pode não apresentar o mesmo desempenho para carteiras de poucos clientes como pode ser visto no exemplo numérico no capítulo 5. Ressaltamos ainda que, sua aplicabilidade pode ser comprometida em situações de carteiras excessivamente heterogênea(Annaert *et. al.* [1]), como foi o caso real apresentado neste estudo. Ainda assim, o método de aproximações ponto de sela, elimina uma outra fonte importante de viés, o processo de discretização das exposições.

Finalmente, pelo fato de do modelo CR+ ser um modelo discreto, os valores de percentis alteram-se em pequenos saltos. A escolha do número de faixas para discretização de exposições individuais pode ter impacto na distribuição de perda agregada, na estimação do número de *defaults*, além de contribuir para a propagação de erro numérico no algoritmo de Panjer. No método de aproximações ponto de sela não é necessário nenhum tipo de discretização das exposições individuais, sem que haja nenhum comprometimento da eficiência computacional.

O método de aproximações ponto de sela do modelo CreditRisk+ preserva as características essenciais da versão analítica do modelo original, contudo utiliza uma suavização útil para os saltos do modelo discreto original, o que permite contornar algumas de suas principais fragilidades computacionais.

Referências Bibliográficas

- [1] Annaert, J., Batista, C.G.J., Lamoot, j., Lanine, G.: Don't Fall from the Saddle: The importance of Higher Moments of Credit Loss Distributions. Research Paper, University of Antwerp, Belgium.(2007)
- [2] Akkaya, N., Kurth, A., Wagner, A.: Incorporating Default Correlations and Severity Variations. Em: Gundlach, M., Lehrbass, F.[30](2003)
- [3] Allen, L., Boudoukh, J., Saunders, A.: *Understanding Market, Credit and Operational Risk: The Value at Risk Approach*, Blackwell Publishing (2004)
- [4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.; Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3): 203-228, (1999)
- [5] Avesani, R.G., Liu, K., Mirestean, A., Salvati, J.: Review and Implementation of Credit Risk Models of the Financial Sector Assessment Program. IMF Working Paper 06/134, May (2006)
- [6] Asmussen, S.: *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore (2000)
- [7] Balzarotti, V., Castro, C., Powell, A.: Reforming Capital Requirements in Emerging Countries. Banco Central de la República Argentina. Mimeo (2002)
- [8] Balzarotti, V., Falkenheim, M., Powell, A.: On the Use of Portfolio Risk Models and Capital Requirements in Emerging Markets: The Case of Argentina. The World Bank Economic Review, vol. 16, n°2, 197-212, (2002)
- [9] Barndorff-Nielsen, O.E., Cox, D.R.: *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman Hall, London (1989)

- [10] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. *Bank for International Settlements*, (1988)
- [11] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): Principles for the Management of Credit Risk. *Bank for International Settlements*, (2000)
- [12] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): The Internal Rating-Based Approach: Supporting Document to the New Basel Capital Accord. *Bank for International Settlements*, (2001)
- [13] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): Consultive Document: The New Basel Capital Accord. *Bank for International Settlements*, (2003)
- [14] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. *Bank for International Settlements*, (2004)
- [15] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions. *Bank for International Settlements*, (2005)
- [16] Binnenhei, nC.: An Analytic Approach to Rating Transitions. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.(2003)
- [17] Black, F., Sholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, (81): 637-654. (1973)
- [18] Bluhm, C., Overbeck, L., Wagner, C.: *An Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman Hall. (2002)
- [19] Boegelein,L., Hamerle, A., Knapp, M., Rosch, D.,:Econometric Methods for Sector Analysis. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.[29](2003)
- [20] Butler, R.W.: *An Introduction to Saddlepoint Methods*, Cambridge University Press, Cambridge. (2007)
- [21] Credit Suisse Financial Product (CSFP):Credit Risk+: A Credit Risk Management Framework, (1997)

- [22] Caouette, J., Altman, E., Narayanan, P.: *Gestão do Risco de Crédito: O Próximo Grande Desafio Financeiro*. Rio de Janeiro: Qualitymark. (1999)
- [23] Daniels, H.E.: Saddlepoint Approximation in Statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, 25:631-650 (1954)
- [24] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T.: Modelling Extremal Events. Number 33. In 'Applications of Mathematics', Berlin: Springer-Verlag. (1997)
- [25] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, third ed., vol. 1, John Wiley Sons, (1968)
- [26] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, second ed., vol. 2, John Wiley Sons, (1971)
- [27] Feuerverger, A., Wong, A.C.M.: Computation of Value-at-Risk for Non-linear Portfolios. *Journal of Risk*, Fall, 3 (1), 37-55. (2000)
- [28] Giese, G.: Enhanced CreditRisk+. Em: Gundlach, M., Lehrbass, F. [30](2003)
- [29] Gordy, M.: Saddlepoint approximation of CreditRisk+, *Journal of Banking & Finance* 26, 1335-1353 (2002)
- [30] Gundlach, M., Lehrbass, F.: *CreditRisk+ in the Banking Industry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2004).
- [31] Gupton, G.M., Finger, C.C., Bhatia, M.: CreditMetrics - Technical Document. Morgan Guaranty Trust Co., <http://www.creditmetrics.com>, (1997)
- [32] Haaf, H., Reiß, O., Schoenmakers, J.: Numerically Stable Computation of CreditRisk+. Em: Gundlach, M., Lehrbass, F. [30](2003)
- [33] Hand, D.J., Henley W.E.: Statistical classification Methods in Consumer Credit Scoring: a Review. *J.R. Statist. Soc. A*, 160, Part 3, pp. 523-541. (1997)
- [34] Hosmer, D.W., Lemeshow, S. *Applied Logistic Regression*. New York: John Wiley, Second Edition. (2000)

- [35] Jensen, J.L.: *Saddlepoint Approximations*, Oxford University Press, Oxford.(1995)
- [36] Jones, P.W., Smith, P.: *Stochastic Process*. Oxford University Press, Oxford. (1990)
- [37] Jorion, P.: *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.(1996)
- [38] Kao, E.P.C.: *An Introduction to Stochastic Processes*. Buxbury Press, Wadsworth, Belmont, CA. (1996)
- [39] Kluge, D., Lehrbass, F.B.: Some Remarks on the Analysis of Asset-Backed Securities. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.[30](2003)
- [40] Lesko, M., Schlottmann, F., Vorgrimler, S.: Estimation of Sector Weights from Real-World Data. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.[30](2003)
- [41] Linsmeier, T., Pearson, N.:*Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*, Working Paper, University of Illinois at Urbana Champaign. (1996)
- [42] Lugannani, R., Rice, S.O.: Saddlepoint Approximations for the Distribution of Sums of Independent Random Variables, *Advances in Applied Probability*, 12: 475-490 (1980)
- [43] Maia, G.: *Risco de Crédito e Regulamentação e Supervisão Bancária: Uma Análise do Acordo da Basiléia*, Unicamp, Campinas, (1996)
- [44] Martin, R., Thompson, K., Browne, C.: Taking the Saddle. *Risk*, June, pp.91-94. (2001)
- [45] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P.: *Quantitative Risk Management:Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton Series In Finance.(2005)
- [46] McKinsey and Company, German Office. CreditPortfolioView 2.0, June. Technische Dokumentation (2001)
- [47] Merton, R.: On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 29: 449-470, (1974)

- [48] Meyer, L.: The New Basel Capital Proposal. Remarks by Governor Laurence H. Meyer at the Annual Washington Conference of the Institute of International Bankers. Washington, DC, (2001)
- [49] Minka, T.: Beyond Newton's method. research.microsoft.com/minka/papers/newton.html. (2000)
- [50] Mood, A., Graybill, F., Boes, D.: *Introduction to the Theory of Statistics*. Singapore: MacGraw, (1974)
- [51] Moody's: Modeling Default Risk. Technical Document, Risk, December 18, (2003)
- [52] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Flannery, W.T.: *Numerical Recipes in C*. Second ed. Cambridge University Press.(1992)
- [53] Panjer, H. H.: Recursive evaluation of a family of compound distributions, *ASTIN Bull.* 12, no.1, 22-26 (1981)
- [54] Panjer, H.H., Willmot, G.E: *Insurance Risk Models*. Schaumburg, IL: Society of Actuaries. (1992)
- [55] Reiß, O.: Dependent Sectors and an Extension to Incorporate Market Risk. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.[30](2003)
- [56] Reiß, O.: Fourier Inversion Techniques for CreditRisk+. Em: Gundlach, M.,Lehrbass, F.[30](2003)
- [57] Rosa, P.T.M.: Modelos de Credit Scoring: Regressão Logística, Chaid e Real. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.IME/USP.(2000)
- [58] Ross, S.: *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Berkeley (1982)
- [59] Schechtman, R., Salomão, V.G., Mikio, S.K., Cronemberger, G.P.: Credit Risk Measurement and the Regulation of Bank Capital and Provision Requirements in Brazil - A Corporate Analysis. Working Papers Series n°91. Banco Central do Brasil. Dezembro, 1518-3548 (2004)

- [60] Wilson, T.: Portfolio Credit Risk, Part I. *Risk*, 111-117 September (1997)
- [61] Wilson, T.: Portfolio Credit Risk, Part II. *Risk*, 56-61 October (1997)
- [62] Wood, A.T.A., Booth, J.G., Butler, R.W.: Saddlepoint Approximations to the CDF of some Statistics with Nonnormal Limit Distributions. *Journal of the American Statistical Association* 88 (June) (422), 680-686 (1993)

Apêndice

A Binomial Negativa Como Composta de Poisson-Gama

Podemos verificar que podemos obter a distribuição binomial negativa por meio da distribuição de Poisson composta Gama;

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_0^{\infty} f_{Poisson(\lambda)}(k) f_{Gama(r, \frac{p}{1-p})}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \lambda^{r-1} \frac{e^{-\lambda(1-p)/p}}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \Gamma(r)} d\lambda \\ &= \frac{(1-p)^r p^{-r}}{k! \Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{p}} \lambda^{k+r-1} d\lambda \end{aligned}$$

Utilizando

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^\gamma} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)}{\gamma \beta^{(\alpha/\gamma)}}$$

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{(1-p)^r p^{-r}}{k! \Gamma(r)} p^{r+k} \Gamma(r+k) \\ &= \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)} (1-p)^r p^k \\ &= \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} (1-p)^r p^k \\ &= \binom{k+r-1}{k} (1-p)^r p^k. \end{aligned}$$

Devido a isso, a distribuição binomial negativa é conhecida como distribuição Poisson composta gama, e pertence à família de distribuições compostas como apresentado na seção 2.5.

B Exemplo da Recursividade de Panjer Para a Distribuição Binomial Negativa

Como a distribuição binomial negativa pertence à família de distribuições compostas, temos que sua relação de recorrência será dada da seguinte forma

Seja p_n a probabilidade de n ocorrências em um intervalo fixo de tempo. Teremos então

$$p_n = \binom{\alpha + n - 1}{n} p^n (1 - p)^\alpha \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{p_{(n-1)}} &= \frac{\binom{\alpha+n-1}{n} p^n (1-p)^\alpha}{\binom{\alpha+n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^\alpha} \\ &= \frac{\frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!} p^n}{\frac{(\alpha+n-2)!}{(n-1)!(\alpha-1)!} p^{n-1}} \\ &= \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)!(n-1)!p}{n(n-1)!(\alpha+n-2)!} \end{aligned}$$

Temos, portanto

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\alpha + n - 1}{n} p \Rightarrow P(X = n) = \frac{(\alpha + n - 1)p}{n} P(X = n - 1)$$

Temos, portanto, segundo Panjer[52]

$$a = p$$

$$b = (\alpha - 1)p$$

e passo inicial dado por

$$P_0 = (1 - p)^\alpha$$

C Recursividade de Panjer no Modelo CreditRisk+ Para Um Setor e Probabilidade de *Default Determinística*

Utilizando o documento original do modelo CR+, CSFP[21] e o estudo de Avesani *et al.*[5], Considere um portfólio de N devedores indexados por $n = 1, \dots, N$. O devedor n possui a exposição monetária de E_n . A probabilidade de *default* do devedor n (no horizonte de um ano) será definida como p_n .

O *default* do devedor n pode ser representado por uma variável aleatória de Bernolli D_n (dentro de um horizonte de tempo, usualmente tratado como um ano), temos então $P(D_n = 1) = p_n$, tendo como complementar $P(D_n = 0) = 1 - p_n$. Portanto, a função geradora de probabilidade de D_n é dada por:

$$G_{D_n}(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P(D_n = x)z^x$$

Como D_n assume somente dois valores (0 ou 1), $G_{D_n}(z)$ pode ser reescrita como

$$G_{D_n}(z) = (1 - p_n)z^0 + p_nz^1 = (1 - p_n) + p_nz$$

A perda agregada do devedor n pode ser representada por uma variável aleatória $L_n = D_n \times E_n$. A distribuição de probabilidade de L_n é dada por $P(L_n = E_n) = p_n$ e por $P(L_n = 0) = 1 - p_n$. A perda agregada total do portfólio será representada pela variável aleatória L :

$$L = \sum_{n=0}^N L_n = \sum_{n=0}^N D_n \times E_n.$$

O principal objetivo do modelo é estimar de uma maneira computacionalmente eficiente a distribuição de L e então determinar o V@R e outras medidas de risco da carteira de crédito. Na implementação computacional do modelo CreditRisk+, é pratica comum a normalização e arredondamento das exposições individuais e o agrupamento em faixas de exposições (Bandas). Seja F o fator de normalização. A exposição normalizada e arredondada do devedor n é denotada por v_n e definida como:

$$v_n = \lceil E_n/F \rceil .$$

Este procedimento limita o número de possíveis valores de L e, portanto, reduz o tempo de processamento de sua distribuição de probabilidade. Contudo, a distribuição final de L é sensível ao número de faixas do modelo. Um número de faixas muito grande (e no caso extremo igual à exposição individual) pode tornar o modelo computacionalmente impraticável e um número muito pequeno de faixas pode distorcer significativamente a distribuição de perda agregada. Uma vez que as exposições individuais estejam normalizadas e arredondadas, podemos definir faixas de exposições comuns da seguinte maneira: seja J o número total, sendo determinado como sendo $J = \max(v_n)_{n=1}^N$. Seja j o índice da faixa de exposição, então cada devedor n estará associado a uma faixa j de exposição comum se $v_n \in v_j = j$ e, portanto, o número esperado de *defaults* na faixa j será dado por:

$$\mu_j = \sum_{v_n=v_j} p_n .$$

Conseqüentemente, o número esperado total de *defaults* da carteira será:

$$\mu = \sum_{j=1}^J \mu_j$$

Da mesma maneira que foram normalizadas e arredondadas as exposições, a perda agregada do devedor n , já incluindo tal procedimento, será denotada por λ_n e definida como:

$$\lambda_n = D_n \times v_n$$

Temos, então, que λ_n é uma variável aleatória com $P(\lambda_n = v_n) = p_n$ e $P(\lambda_n = 0) = 1 - p_n$. A perda agregada total da carteira será representada por uma variável aleatória λ :

$$\lambda = \sum_{n=1}^N \lambda_n .$$

Encontrar a distribuição de probabilidade de λ é equivalente a encontrar a distribuição de probabilidade de L .

O modelo desenvolvido até a esse ponto possui implicitamente uma forte suposição: as probabilidades de *default* são apenas variáveis de entrada no cálculo da distribuição de perda agregada e permanecem inalteradas ao longo de um período considerado (usualmente um ano), ou seja, tais probabilidades são determinísticas em tal período. Essa suposição será alterada no decorrer do desenvolvimento do modelo. Uma segunda suposição chave até então é a de que os eventos de *default* entre os devedores são independentes. Como o objetivo é determinar a distribuição de λ (ou equivalentemente a Função Geradora de Probabilidade de λ), podemos utilizar os mesmos desenvolvimentos já apresentados. Como λ_n assume somente os valores $(0, v_n)$, então a FGP de λ_n será:

$$G_{\lambda_n}(z) = P(\lambda = 0)z^0 + P(\lambda = v_n)z^{v_n} = (1 - p_n) + p_n z^{v_n}.$$

Como λ é o somatório de λ_n entre todos os n 's e assumindo que os eventos de *default* sejam independentes entre os devedores, a FGP de λ será:

$$G_\lambda(z) = \prod_{n=1}^N G_{\lambda_n}(z) = \prod_{n=1}^N [(1 - p_n) + p_n z^{v_n}]$$

Uma terceira suposição chave nesse modelo é a de que as probabilidades individuais de *default* são suficientemente pequenas de maneira que a distribuição composta de Bernoulli pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson. Como assumimos que os eventos de *default* possuem distribuição de Bernoulli, temos então que a FGP do evento de *default* do devedor n será:

$$G_{D_n}(z) = (1 - p_n) + p_n z = 1 + p_n(z - 1)$$

De maneira equivalente

$$G_{D_n}(z) = \exp[\ln(G_{D_n}(z))] = \exp[\ln(1 + p_n(z - 1))]$$

Assumindo que p_n é suficientemente pequena, então $p_n(z - 1)$ também será suficientemente pequeno desde que ainda seja válida a suposição adicional de que $|z| \leq 1$. Definindo $w = p_n(z - 1)$ e utilizando a expansão de Taylor da função $\ln(1 + w)$ temos:

$$\ln(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} \dots$$

Considerando w suficientemente pequeno temos a seguinte aproximação:

$$\ln(1 + w) \approx w$$

E, portanto, temos

$$G_{D_n}(z) = \exp[\ln(1 + p_n(z - 1))] \approx \exp[p_n(z - 1)]$$

Temos ainda pela expansão de Taylor da expressão $\exp[p_n(z - 1)]$ o seguinte resultado:

$$G_{D_n}(z) \approx \exp[p_n(z - 1)] = \exp(-p_n) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{p_n^x}{x!} z^x$$

Onde temos a FGP de uma distribuição de Poisson com taxa p_n . Dessa forma para pequenos valores de p_n a distribuição de Bernoulli de D_n pode ser aproximada para uma distribuição de Poisson de parâmetro λ . Utilizando essa aproximação, a probabilidade de D_n é dada por:

$$P(D_n = x) = \exp(-p_n) \frac{p_n^x}{x!}$$

Podemos dessa forma derivar a FGP para λ_n

$$G_{\lambda_n}(z) = \mathbb{E}(z_n^\lambda) = \mathbb{E}(z_n^D \times v_n)$$

Como v_n no modelo é não estocástico, podemos reescrever essa esperança da seguinte forma:

$$G_{\lambda_n}(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P(D_n = x) \cdot z^{D_n \cdot v_n} = \sum_{x=0}^{\infty} \exp(-p_n) \frac{p_n^x}{x!} \cdot (z^{v_n})^x$$

Como D_n assume somente valores (0 ou 1), essa expressão pode ser reescrita como:

$$G_{\lambda_n}(z) = (1 + p_n \cdot z^{v_n}) \exp(-p_n)$$

Considerando novamente p_n suficientemente pequena temos pela expansão de Taylor que $\exp(p_n \times z^{v_n}) \approx 1 + p_n \times z^{v_n}$ e portanto a FGP individual normalizada e arredondada para perda agregada λ_n , pode ser aproximada por:

$$G_{\lambda_n}(z) = \exp[p_n(z^{v_n} - 1)]$$

Como as perdas agregadas são mutuamente independentes, $G_\lambda(z)$ será simplesmente o produto das FGP individuais:

$$G_\lambda(z) = \prod_{n=1}^N G_{\lambda_n}(z)$$

Utilizando as propriedades exponenciais temos:

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= \prod_{n=1}^N \exp[p_n(z^{v_n} - 1)] \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^N p_n(z^{v_n} - 1) \right] \end{aligned}$$

Utilizando as definições de exposição por faixas, temos a $G_\lambda(z)$ sendo reescrita como:

$$G_\lambda(z) = \exp \left[\sum_{j=1}^J \sum_{v_n=v_j} p_n(z^{v_j} - 1) \right]$$

Finalmente, essa expressão pode ser simplificada pela definição de número esperado de *default* dentro de cada faixa j , e portanto podemos obter o número total esperado de *defaults* da carteira:

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= \exp \left[\sum_{j=1}^J \mu_j (z^{v_j} - 1) \right] \\ &= \exp \left[\mu \left(\sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\mu} (z^{v_j} - 1) \right) \right] \end{aligned}$$

Esta equação define a distribuição de probabilidade da perda agregada total da carteira de crédito quando: os eventos de *default* são mutuamente independentes, as probabilidades de *default* são conhecidas e determinísticas e a distribuição Poisson é usada para aproximar a distribuição individual de eventos de *default*.

Para utilização da recursividade de Panjer, considere a seguinte expressão

$$G(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^J \mu_j(z^{v_j} - 1)\right)$$

agora seja $H(z) = G(z)$ e $S(z) = \sum_{j=1}^J \mu_j(z^{v_j} - 1)$. Temos, então que:

$$H(z) = e^{S(z)}$$

$$H'(z) = e^{S(z)} \cdot S'(z) \Leftrightarrow H'(z) = H(z) \cdot S'(z)$$

$$H''(z) = e^{S(z)} \cdot S'(z)^2 + e^{S(z)} \cdot S''(z) \Leftrightarrow H''(z) = H(z) \cdot S'(z)^2 + H(z) \cdot S''(z)$$

Temos então:

$$G'(z)|_{z=0} = G(z) \cdot \left(\frac{d(\sum_{j=1}^J \mu_j(z^{v_j} - 1))}{dz}\right)\Big|_{z=0} \Leftrightarrow \frac{d^n G(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{dG(z)}{dz}\right)\Big|_{z=0}.$$

Considerando a recorrência em $H^{(n)}(z)$, obtemos:

$$\frac{d^n H(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} H(z) \times \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} S(z)\Big|_{z=0}.$$

Considerando agora a seguinte propriedade:

$$P(L = n) = \frac{G_L^n(0)}{n!}$$

Temos então:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n G(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = A_n = P(\lambda_j = v_j)$$

Lembrando que $v_n \in v_j = j$

$$\Leftrightarrow n! A_n = \frac{d^n G(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = \frac{d^n H(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} H(z) \times \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} S(z)\Big|_{z=0}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} H(z) \times \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} S(z)\Big|_{z=0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} G(z) \times \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(\sum_{j=1}^J \mu_j(z^{v_j} - 1)\right)\Big|_{z=0} \end{aligned}$$

Agora, analisando a última igualdade, temos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \underbrace{\frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} G(z)}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(\sum_{j=1}^J \mu_j (z^{v_j} - 1) \right)}_{(2)} \Big|_{z=0}$$

$$(1) A_{n-k-1} = \frac{1}{(n-k-1)!} \cdot \frac{d^{n-k-1} G(z)}{dz^{n-k-1}} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow (n-k-1)! A_{n-k-1} = \frac{d^{n-k-1} G(z)}{dz^{n-k-1}} \Big|_{z=0}$$

(2) Observe que, quando o grau do polinômio é maior que o grau da derivada, o valor da expressão é zero. Da mesma forma, quando o grau do polinômio é menor que o grau da derivada, o valor da expressão também é zero. Desta forma, temos a seguinte relação:

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(\sum_{j=1}^J \mu_j (z^{v_j} - 1) \right) \Big|_{z=0} = \begin{cases} \mu_j (k+1)! & \text{para } v_j = k+1 \\ 0 & \text{para } v_j \neq k+1 \end{cases}$$

Portanto, substituindo temos:

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0, k=v_j-1}^{n-1} (n-k-1)! A_{n-k-1} \times \mu_j (k+1)!$$

Trabalhando os binômios e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$A_n = \sum_{0 \leq k \leq n-1, k=v_j-1} \frac{A_{n-(k+1)}}{n} \times \mu_j (k+1)$$

Tendo, finalmente, a relação de recorrência:

$$A_n = \sum_{j: v_j \leq n} \frac{A_{n-v_j}}{n} \times \mu_j \times v_j$$

D Estimação Via Máxima Verossimilhança dos Parâmetros de Uma Distribuição Gama

Sejam n independentes pontos observados de uma variável $X, [x_1, \dots, x_n]$, de um mesma densidade com vetor de θ de parâmetros. Digamos que $\theta = (\alpha, \beta)$ seja o vetor

de parâmetros da distribuição de probabilidade de X restrita à classe de família de densidades Gama, ou seja:

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0.$$

Podemos observar um exemplo dessa distribuição na figura abaixo.

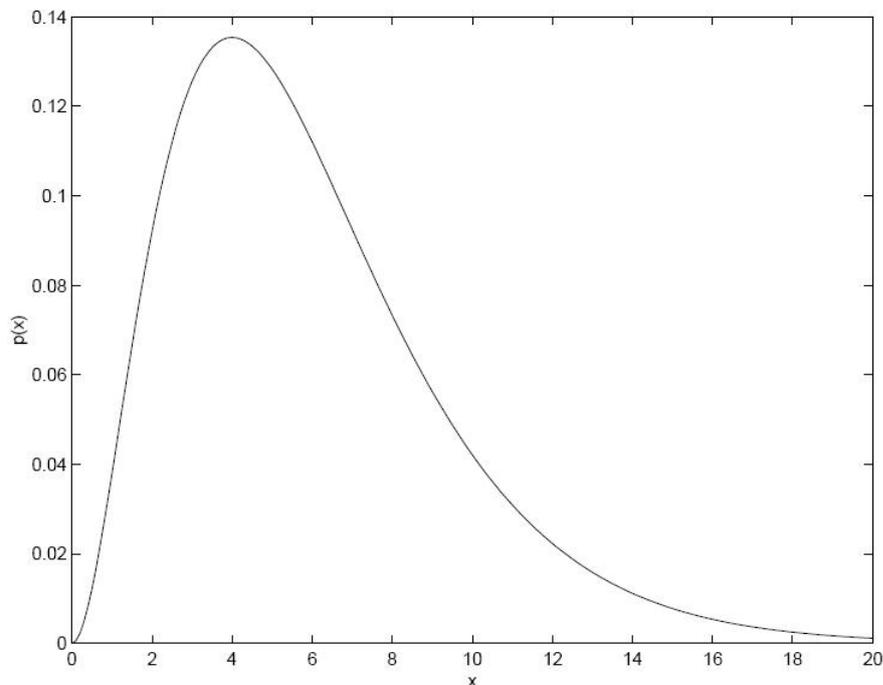


Figura 37: Exemplo de Distribuição Gama(3,2)

Uma amostra aleatória $x = [x_1, \dots, x_n], x \in \aleph$ (onde \aleph é o espaço de amostras), retirada de uma população com uma função de densidade de probabilidade $f(x_i, \theta)$, a qual depende do vetor de parâmetros θ , tem uma função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

Definição: Função de Verossimilhança, Mood et al.[50] 1. Para um modelo f , a partir do qual uma amostra $x \in \aleph$ for observada, usamos o termo “função de verossimilhança” ou simplesmente “verossimilhança” para uma função definida em um espaço paramétrico $\Theta \in \aleph^+ \cup [0]$, escrita como

$$L(x|\theta) = L(x_1, \dots, x_n|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta) = c(x)h(x; \theta).$$

O problema consiste em obter-se o vetor θ que maximiza esta função. O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é o vetor tal que

$$L(x, \hat{\theta}) > L(x, \tilde{\theta})$$

onde $\tilde{\theta}$ é qualquer outro estimador de θ . Na maioria dos casos, trabalha-se com o logaritmo natural da função de verossimilhança ($\ln L$). Como (\ln) é crescente, terá valor máximo para o mesmo valor de θ que torna L máxima, sendo em geral mais simples e produzindo, portanto, os mesmos resultados da maximização da função original, ou seja

$$l(x_1, \dots, x_n|\theta) = \ln L(x_1, \dots, x_n|\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta).$$

Admitindo-se que $\theta \in \mathfrak{R}$ e que $L(x_1, \dots, x_n|\theta)$ seja derivável em θ , obteremos os estimadores de máxima verossimilhança como sendo

$$\hat{\theta}_{EMV} = \arg_{\max} \theta \in \Theta l(x_1, \dots, x_n|\theta)$$

Desta forma, para a distribuição Gama, teremos

$$\begin{aligned} l(x|\alpha, \beta) &= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= n(\alpha - 1) \overline{\ln x} - n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln \beta - n \frac{\bar{x}}{\beta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Maximizando com relação a β , teremos

$$\beta = \frac{\bar{x}}{\alpha}.$$

Substituindo em (5.1)

$$l(x|\alpha, \hat{\beta}) = n(\alpha - 1) \overline{\ln x} - n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln \bar{x} + n\alpha \ln \alpha - n\alpha \quad (2)$$

Existem algumas opções de algoritmos para otimização de (2). Apresentaremos um método que converge em quatro iterações, obtido via método de Newton generalizado conforme Minka [49]. Para tanto, utilizamos a seguinte aproximação

$$l(x|\alpha, \hat{\beta}) \approx c_0 + c_1\alpha + c_2 \ln \alpha$$

As iterações se darão pela atualização de

$$\frac{1}{\alpha^{novo}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\overline{\ln x} - \ln \bar{x} + \ln \alpha - \Psi(\alpha)}{\alpha^2(\frac{1}{\alpha} - \Psi'(\alpha))}$$

Onde $\Psi = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ representa a função digamma. Um passo inicial pode ser obtido por meio de uma nova aproximação

$$\ln \Gamma(\alpha) \approx \alpha \ln(\alpha) - \alpha - \frac{1}{2} \ln \alpha + const, \quad (\text{Stirling})$$

$$\Psi(\alpha) \approx \ln(\alpha) - \frac{1}{2\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_0 \approx \frac{0,5}{\overline{\ln x} - \ln \bar{x}},$$

observando ainda que em geral $\ln \bar{x} \geq \overline{\ln x}$.

Existem outros procedimentos de otimização que atendem o mesmo propósito, como por exemplo o método de Newton-Raphson apresentado em Press [52], contudo com número maior de iterações necessárias para convergência.

E Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela

Apresentaremos nessa seção, os valores obtidos por meio do método de aproximações ponto de sela com a intenção de compará-los aos resultados obtidos por meio do algoritmo recursivo de Panjer. Apresentamos na sequência de três tabelas o intervalo de pontos de sela para os mesmos valores de parâmetros do modelo padrão⁸.

⁸As definições do modelo padrão estão detalhadas no capítulo 6

Os resultados apresentados são referentes aos 82 pontos de sela utilizados para estimação do CE. Para cada ponto de sela temos seus correspondentes: número de *default* estimado(\hat{n}), os valores de \hat{w} e \hat{u} utilizados para o cálculo do percentil e seu respectivo valor reais.

A eficiência do método de aproximações ponto de sela, pode ser verificada por meio da comparação da Tabela 6.18. Enquanto o modelo padrão estimado via recursividade de Panjer utiliza 1.346 iterações para 16 milhões de clientes, o método de aproximações ponto de sela exige o processamento de somente 82 pontos.

MI	ALPHA	DELTA	U	Saddlepoint (0, Z)	Número de Default	W	U	Percentil	Valor em Risco - Milhões
403,07	4	0,990174	13.992.103	0,0015	822	0,3167	0,3661	0,4626	11.495
				0,0016	823	0,4903	0,3954	0,8612	11.517
				0,0017	825	0,6168	0,4253	0,9721	11.538
				0,0018	826	0,7214	0,4560	1,0128	11.560
				0,0019	828	0,8127	0,4875	1,0272	11.583
				0,002	830	0,8948	0,5198	1,0301	11.607
				0,0021	831	0,9699	0,5530	1,0277	11.631
				0,0022	833	1,0396	0,5870	1,0231	11.655
				0,0023	835	1,1049	0,6220	1,0177	11.681
				0,0024	837	1,1666	0,6579	1,0122	11.707
				0,0025	839	1,2251	0,6948	1,0071	11.733
				0,0026	841	1,2810	0,7327	1,0025	11.761
				0,0027	843	1,3346	0,7718	0,9985	11.789
				0,0028	845	1,3861	0,8119	0,9950	11.818
				0,0029	847	1,4358	0,8533	0,9921	11.848
				0,003	849	1,4838	0,8959	0,9898	11.879
				0,0031	851	1,5302	0,9397	0,9878	11.911
				0,0032	854	1,5754	0,9850	0,9853	11.943
				0,0033	856	1,6192	1,0316	0,9851	11.977
				0,0034	858	1,6620	1,0797	0,9843	12.012
				0,0035	861	1,7036	1,1294	0,9837	12.048
				0,0036	864	1,7443	1,1807	0,9833	12.085
				0,0037	866	1,7840	1,2337	0,9831	12.123
				0,0038	869	1,8229	1,2885	0,9831	12.163
				0,0039	872	1,8609	1,3451	0,9832	12.204
				0,004	875	1,8982	1,4038	0,9834	12.247
				0,0041	878	1,9348	1,4646	0,9837	12.291
				0,0042	882	1,9707	1,5276	0,9840	12.336

Figura 38: Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Um

MI	ALPHA	DELTA	U	Saddlepoint (0,Z)	Número de Default	W	U	Percentil	Valor em Risco - Milhões
				0,0042	882	1,9707	1,5276	0,9840	12,336
				0,0043	885	2,0060	1,5929	0,9845	12,384
				0,0044	889	2,0406	1,6607	0,9849	12,433
				0,0045	892	2,0747	1,7311	0,9854	12,484
				0,0046	896	2,1083	1,8043	0,9860	12,537
				0,0047	900	2,1413	1,8804	0,9865	12,592
				0,0048	904	2,1738	1,9596	0,9870	12,649
				0,0049	908	2,2058	2,0421	0,9876	12,709
				0,005	913	2,2374	2,1281	0,9881	12,772
				0,0051	917	2,2686	2,2179	0,9887	12,837
				0,0052	922	2,2993	2,3116	0,9892	12,905
				0,0053	927	2,3297	2,4097	0,9897	12,976
				0,0054	933	2,3596	2,5123	0,9902	13,050
				0,0055	938	2,3892	2,6198	0,9907	13,128
				0,0056	944	2,4184	2,7325	0,9912	13,210
				0,0057	950	2,4473	2,8509	0,9916	13,296
				0,0058	957	2,4759	2,9754	0,9921	13,386
				0,0059	963	2,5041	3,1065	0,9925	13,481
				0,006	971	2,5320	3,2447	0,9929	13,581
				0,0061	978	2,5597	3,3905	0,9933	13,687
				0,0062	986	2,5870	3,5448	0,9937	13,799
				0,0063	995	2,6141	3,7081	0,9940	13,917
				0,0064	1.004	2,6409	3,8814	0,9944	14,043
				0,0065	1.013	2,6674	4,0655	0,9947	14,176
				0,0066	1.023	2,6937	4,2615	0,9950	14,319
				0,0067	1.034	2,7198	4,4707	0,9953	14,470
				0,0068	1.046	2,7456	4,6943	0,9956	14,633
				0,0069	1.058	2,7712	4,9340	0,9959	14,806
				0,007	1.072	2,7966	5,1915	0,9961	14,993

Figura 39: Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Dois

MI	ALPHA	DELTA	U	Saddlepoint (0,Z)	Número de Default	W	U	Percentil	Valor em Risco - Milhões
				0,0071	1.086	2,8217	5,4689	0,9963	15,194
				0,0072	1.101	2,8467	5,7687	0,9966	15,412
				0,0073	1.118	2,8715	6,0935	0,9968	15,648
				0,0074	1.137	2,8961	6,4467	0,9970	15,904
				0,0075	1.157	2,9205	6,8322	0,9972	16,183
				0,0076	1.179	2,9448	7,2546	0,9973	16,490
				0,0077	1.203	2,9689	7,7195	0,9975	16,827
				0,0078	1.229	2,9928	8,2337	0,9977	17,200
				0,0079	1.259	3,0166	8,8054	0,9978	17,615
				0,008	1.292	3,0403	9,4449	0,9979	18,079
				0,0081	1.329	3,0639	10,1649	0,9981	18,602
				0,0082	1.372	3,0874	10,9818	0,9982	19,194
				0,0083	1.420	3,1108	11,9164	0,9983	19,872
				0,0084	1.476	3,1341	12,9961	0,9984	20,656
				0,0085	1.542	3,1575	14,2578	0,9985	21,571
				0,0086	1.619	3,1809	15,7515	0,9986	22,655
				0,0087	1.712	3,2043	17,5478	0,9987	23,959
				0,0088	1.826	3,2280	19,7490	0,9988	25,556
				0,0089	1.970	3,2520	22,5093	0,9989	27,559
				0,009	2.154	3,2764	26,0728	0,9990	30,145
				0,0091	2.402	3,3018	30,8499	0,9991	33,612
				0,0092	2.752	3,3285	37,5878	0,9991	38,501
				0,0093	3.282	3,3580	47,8051	0,9992	45,916
				0,0094	4.180	3,3930	65,1356	0,9993	58,492
				0,0095	6.039	3,4428	100,9740	0,9994	84,500

Figura 40: Valores Estimados Via Aproximações Ponto de Sela - Modelo Padrão - Parte Três

F Apresentação em Código SAS dos Valores Estimados

Os resultados obtidos para análise exploratória dos dados foram resultados da execução de procedimentos pré programados e disponibilizados no *switch* estatístico do aplicativo SAS: PROC UNIVARIATE e PROC SUMMARY e suas opções. A estimação via máxima verossimilhança no SAS pode ser implementada por meio de quatro procedimentos em diferentes ambientes: PROC IML (Ambiente em linguagem matricial), PROC MODEL, PROC NLP, PROC CAPABILITY (com a escolha da distribuição gama como distribuição a ser estimada)⁹.

Foram estimados os valores da distribuição Gama via máxima verossimilhança por meio do procedimento PROC CAPABILITY, escolhendo um α inicial conforme o método sugerido nesse apêndice D - Estimação Via Máxima Verossimilhança dos Parâmetros de Uma Distribuição Gama na página 122. Nesse ambiente SAS, o procedimento de otimização utilizado é método de Newton-Raphson.

Parametric Density Estimation Options

Table 11.1 lists options that display a parametric density estimate on the histogram.

Table 11.1: Parametric Distribution Options

BETA(<i>beta-options</i>)	fits beta distribution with threshold parameter θ , scale parameter σ , and shape parameters α and β
EXPONENTIAL(<i>exponential-options</i>)	fits exponential distribution with threshold parameter θ and scale parameter σ
GAMMA(<i>gamma-options</i>)	fits gamma distribution with threshold parameter θ , scale parameter σ , and shape parameter α
LOGNORMAL(<i>lognormal-options</i>)	fits lognormal distribution with threshold parameter θ , scale parameter ζ , and shape parameter σ
NORMAL(<i>normal-options</i>)	fits normal distribution with mean μ and standard deviation σ
SB(<i>SB-options</i>)	fits Johnson S_B distribution with threshold parameter θ , scale parameter σ , and shape parameters δ and γ
SU(<i>SU-options</i>)	fits Johnson S_U distribution with location parameter θ , scale parameter σ , and shape parameters δ and γ
WEIBULL(<i>Weibull-options</i>)	fits Weibull distribution with threshold parameter θ , scale parameter σ , and shape parameter c

Figura 41: Opções de Estimação de Densidades Parametricas - PROC CAPABILITY - SAS

⁹Para uma descrição mais detalhada pode-se consultar: *Parametric Density Estimation Options* - <http://support.sas.com/onlinedoc/913/docMainpage.jsp>

Table 11.5: Gamma-Options

ALPHADELTA= <i>value</i>	specifies change in successive estimates of α at which the Newton-Raphson approximation of $\hat{\alpha}$ terminates
ALPHAINITIAL= <i>value</i>	specifies initial value for α in Newton-Raphson approximation of $\hat{\alpha}$
MAXITER= <i>n</i>	specifies maximum number of iterations in Newton-Raphson approximation of $\hat{\alpha}$
SIGMA= <i>value</i>	specifies scale parameter σ for fitted gamma curve
ALPHA= <i>value</i>	specifies shape parameter α for fitted gamma curve
THETA= <i>value</i> EST	specifies threshold parameter θ for fitted gamma curve

Figura 42: Opções de Estimação da Distribuição Gama - PROC CAPABILITY - SAS

Apresentaremos os códigos em SAS da estimação do CE e do CER. Como cada modalidade de CE gerou um código com grande número de linhas de programação, os códigos serão apresentados em partes, com vista a uma melhor visualização.

```

1  /*MACRO DE CÁLCULO DO CE*/
2  %MACRO VAR_01;
3  %GLOBAL GRP MSG PCTL_NEW NRPE;
4  /*PERCENTIL QUE SERÁ APURADO O V@R*/;
5  %LET PRCT_NEW = .995;
6  /*NUMERO DE INTERACOES*/;
7  %LET INT = 100000; /*N_IT*/
8
9  PROC SQL; /*TRATAMENTO INICIAL DA BASE DE DADOS - RETIRADA DE CASOS ATÍPICOS*/
10 CREATE TABLE MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO AS
11 SELECT LNK_CLI, PD, DP,
12 SUM(EXP_LQD_OPR) AS VL_EXP,
13 SUM(PE) AS PE,
14 SUM(SDO_AGRP_CLI) AS SDO_AGRP_CLI
15 FROM INFOCAR.BKP_OPR_&DATA_MOVIMENTO (WHERE = (TP_OPR IN ( 1 3 4 5)))
16 WHERE IN_CLI_OPR_VCD IN ('N') AND LNK_CLI NOT IN (2003532535, 2017162082)
17 GROUP BY LNK_CLI, PD, DP
18 HAVING VL_EXP > 0;
19 QUIT; %ERRO;
20
21 PROC SQL; /*INICIO DE CÁLCULO DO CE*/
22 CREATE TABLE MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO (COMPRESS=NO REUSE=NO) AS
23 SELECT *, SUM(PE) AS SUMPE, /*PERDA ESPERADA TOTAL*/
24 SUM(VL_EXP) AS SUMEXP, /*EXPOSICAO TOTAL*/
25 MAX(VL_EXP) AS MOR_VL_EXP, /*MAIOR EXPOSICAO */
26 FROM MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO;
27 QUIT; %ERRO;
28
29 DATA MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO (COMPRESS=NO REUSE=NO);
30 /*DROP MOR_VL_EXP*/
31 SET MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO;
32 U = MAX (INT ((MOR_VL_EXP/100) + 1), INT (SUMPE / 1000)); /*U*/
33 L = INT (VL_EXP / U) + 1; /*V_A*/
34 PDA = PE / (L * U); /*PROBABILIDADE DEFAULT AJUSTADA*/
35 DPA = PDA/2; /*VARIANCIA DA PROB.DEFAULT AJUSTADA - HIPÓTESE DO MODELO ORIGINAL*/
36 RUN; %ERRO;

```

Figura 43: CE - Códigos em SAS - Primeira Parte

```

37
38 PROC SQL;
39 CREATE TABLE MENSAL_INPUT_&DATA_MOVIMENTO (COMPRESS=NO REUSE=NO) AS
40 SELECT *,
41     SUM (PDA) AS MI, /*MI*/
42     SUM (DPA) AS SIGMA /*SIGMA*/
43 FROM MENSAL_INPUT_&DATA_MOVIMENTO;
44 QUIT;%ERRO;
45
46 PROC SQL;
47 CREATE TABLE MENSAL_TBL_GERAL_&DATA_MOVIMENTO (COMPRESS=NO REUSE=NO) AS
48 SELECT *, L- 1 AS R1, /*R1*/
49     L AS T1, /*T1*/
50     (PDA / (MI + MI**2 / SIGMA**2 /*ALFA*/)) * L * MI**2 / SIGMA**2 /*ALFA*/ AS R2, /*R2*/
51     -PDA / (MI + MI**2 / SIGMA**2 /*ALFA*/) AS T2, /*T2*/
52     MI**2 / SIGMA**2 AS ALFA, /*ALFA*/
53     SIGMA**2 / MI / (1 + (SIGMA**2 / MI)) AS RO, /*RO*/
54     INT (SUMPE/U) AS NRPE /*MEDIA PE*/
55 FROM (SELECT U, L, MI, SIGMA,
56     COUNT(LNK_CLI) AS QTD_CLI_GR, /*QUANTIDADE DE CLIENTES DA BANDA*/
57     SUMPE FORMAT COMMAX20., /*PE TOTAL*/
58     SUMEXP FORMAT COMMAX20., /*EXPOSICAO TOTAL*/
59     SUM(PDA) AS PDA FORMAT BEST0.6, /*PDA EMPACATODA*/
60     SUM(DPA) AS DPA FORMAT BEST0.6, /*DPA EMPACATODA*/
61 FROM MENSAL_INPUT_&DATA_MOVIMENTO
62 GROUP BY U, L, MI, SIGMA, SUMPE, SUMEXP);
63 QUIT;%ERRO;

```

Figura 44: CE - Códigos em SAS - Segunda Parte

```

64
65 DATA MENSAL_TBL_PDF_&DATA_MOVIMENTO (KEEP=N1 P P_ACUM VALOR DT_MVT)
66 MENSAL_RESULTADOS_&DATA_MOVIMENTO(KEEP = DESCRICAO VALOR);
67 LABEL P = 'PROBABILIDADE DE DEFAULT'
68 N1 = 'NUMERO DE DEFAULTS';
69 SET MENSAL_TBL_GERAL_&DATA_MOVIMENTO;
70 /* CRIA VETORES A E B */
71 ARRAY A [&INT] _TEMPORARY_;
72 ARRAY B [&INT] _TEMPORARY_;
73 ARRAY PRCT [8] _TEMPORARY_ (.5 .75 .95 .97 .99 .995 .9975 .9999) /*PERCENTIS QUE
74 SERAO APURADOS O V@R*/;
75 /* ZERA OS VETORES A E B */
76 DO I = 1 TO &INT;
77     A[i] = 0;
78     B[i] = 0;
79 END;
80 /* CALCULA A PROBABILIDADE PARA NUMERO DE DEFAULT IGUAL A ZERO */
81 A[1] = (1 - RO)** ALFA;
82 B[1] = A[1];
83 N = 1;
84 X = 1;
85 /* LIMITA AS INTERAÇÕES */
86 DO UNTIL ((B[N] > 0.99999) OR (N+1 > &INT));

```

Figura 45: CE - Códigos em SAS - Terceira Parte

```

85 /* LIMITA AS INTERAÇÕES */
86 DO UNTIL ((B[N] > 0.99999) OR (N+1 > &INT));
87 /* APURA O VALOR DO V@R NOS PERCENTIS DETERMINADOS */
88 IF N > 2 THEN
89   IF X <= 8 THEN
90     DO;
91       IF B[N-1] > PRCT[X] THEN
92         DO;
93           DESCRICAO = COMPRESS (PUT (PRCT[X], 15.4));
94           VALOR = U * (N-3 + ((PRCT[X] - B[N-2]) / (B[N-1] - B[N-2]))) - SUMPE;
95           OUTPUT MENSAL.RESULTADOS_&DATA_MOVIMENTO;
96           X = X + 1;
97         END;
98       END;
99 /* INCLUI VALORES NO VETOR A */
100 DO OBSNUM = 1 TO LAST;
101   SET MENSAL.TBL_GERAL_&DATA_MOVIMENTO POINT=OBSNUM NOBS=LAST;
102
103   IF R1 < N THEN
104     A[N+1] = A[N+1] + R2 * A[N-R1];
105   IF T1 < N+1 AND T1 > 0 THEN
106     A[N+1] = A[N+1] - T2 * (N-T1) * A[N+1-T1];
107   END;
108 /* VALORES PARA PLOTAR O GRAFICO DA DISTRIBUICAO DE FREQUENCIA */
109 A[N+1] = A[N+1] / N;
110 B[N+1] = B[N] + A[N+1];
111 P = A[N+1];
112 P_ACUM = B[N+1];
113 N1 = N;
114 VALOR = N * U;
115 N = N + 1;
116 DT_MVT = "&DATA_MOVIMENTO";
117 OUTPUT MENSAL.TBL_PDF_&DATA_MOVIMENTO;
118 END;

```

Figura 46: CE - Códigos em SAS - Quarta Parte

```

119 /* MENSAGEM DE ERRO CASO O MODELO NÃO CONVERGA */
120 IF N+1 > &INT THEN
121   DO;
122     FILE LOG;
123     PUT /* >>>>> ATENCAO: NAO CONVERGIU <<<<<<<< /*;
124     ABORT 255;
125   END;
126   STOP;
127   FORMAT VALOR COMMAX20.2;
128   RUN,%ERRO;
129
130 %LET VAR="";
131
132 DATA_NULL_/*0.9950*/
133 SET MENSAL.RESULTADOS_&DATA_MOVIMENTO;
134 IF DESCRICAO = '0.9950' THEN /*====VERIFICAR CASO ISSO
135   NAO ACONTEÇA, O QUE EU GRAVO????????*/
136   CALL SYMPUT ('VAR', VALOR);
137 RUN,%ERRO;
138 %MEND;

```

Figura 47: CE - Códigos em SAS - Quinta Parte

```

1  /*MACRO DE CÁLCULO DO CER*/
2  %MACRO VAR_02;
3
4  /*BASE DE DADOS DE ORIGEM*/
5  PROC SQL;
6  CREATE TABLE INFOCAR.OPR_&DATA_MOVIMENTO AS
7  SELECT * FROM INFOCAR.BKP_OPR_&DATA_MOVIMENTO AS A1
8  LEFT JOIN MENSAL.INPUT_&DATA_MOVIMENTO(KEEP=LNK_CLI RC VL_EXP) AS A2
9  ON A1.LNK_CLI = A2.LNK_CLI;
10 QUIT;%ERRO;
11
12 /*AJUSTE DA BASE DE CLIENTES E DEFINIÇÃO DE NOVAS VARIÁVEIS*/
13 DATA INFOCAR.OPR_&DATA_MOVIMENTO;
14 LABEL VL_VAR_RTDO = "VALOR DO VAR RATEADO POR OPERAÇÃO/PRODUTO";
15 LABEL PZ_VCTO = "MATURIDADE DA CARTEIRA-DEFINIDO PELO ACORDO DE BASILEIA";
16 LABEL VL_CRLC = "VALOR DA CORRELAÇÃO";
17 LABEL AJST_VCTO = "AJUSTE DO VENCIMENTO";
18 LABEL EXG_CPTL = "EXIGENCIA DE CAPITAL";
19 LABEL ATV_PDRD_RSCO = "ATIVO PONDERADO PELO RISCO";
20 FORMAT VL_VAR_RTDO COMMAX15.2;
21 FORMAT ATV_PDRD_RSCO COMMAX15.2;
22 FORMAT VL_PDA_EPRO_CPTL COMMAX15.2;
23 SET INFOCAR.OPR_&DATA_MOVIMENTO;
24 IF TP_OPR IN (1 3 4 5)
25 AND IN_CLI_OPR_VCD = "N"; /*SOMENTE PARA REGISTROS SE MARCAÇÃO DE
26 VENCIDO CFE X_ICR_03"VAR_04"*/
27 AND VL_EXP NE 0 AND RC NE 0 /*EVITAR ERRO DIVISÃO POR ZERO*/
28 THEN DO;
29 VL_VAR_RTDO = RC*(EXP_LQD_OPR/VL_EXP); /*EXP_LQD_OPR
30 CALCULADA EM ICR_03(INDIVIDUAL) VL_EXP(SUMARIZADA PARA O VAR)*/
31 END;
32 ELSE
33 VL_VAR_RTDO = 0; /*OPERACOES VENCIDAS DE DE MAIS TP_OPR*/
34
35 PZ_VCTO=2.5; /*VALOR PADRAO DEFINIDO POR BASILEIA*/
36 VL_LGD_EXG_CPTL = 0.45; /*VALOR PADRAO DEFINIDO POR BASILEIA*/
37

```

Figura 48: CER - Códigos em SAS - Primeira Parte

```

38 /*AJUSTA PD PARA OPERACOES VENCIDAS HA MAIS DE 90 DIAS*/
39 /*CALCULA PERDA ESPERADA REGULATORIA */
40
41 IF IN_ARS_ATR="S" OR PD > 0.367879 THEN
42 DO;
43 PD_AJSD = 0.999999999;
44 VL_PDA_EPRO_CPTL = VL_LGD_EXG_CPTL * VL_SDO_CTB;
45 END;
46 ELSE
47 DO;
48 PD_AJSD = PD;
49 IN_ARS_ATR="N"; /*SOMENTE PARA CORRIGIR OS VALORES QUE CHEGARAM MISSING*/
50 VL_PDA_EPRO_CPTL = PD * VL_LGD_EXG_CPTL * VL_SDO_CTB; /*PD x LGD x SALDO*/
51 END;
52
53 /*IF CD_CLSC_CLI IN ( 10, 20, 40) THEN /*CORPORATE-PAIS-BANCOS***PORTIFOLIO 1,2 4*/
54 /* DO;
55 VL_CRLC=0.12*(1-EXP(-50*PD_AJSD))/(1-EXP(-50))+0.24*(1-(1-EXP(-50*PD_AJSD)))/(1-EXP(-50));
56 AJST_VCTO=(0.11852-0.05478*LOG(PD_AJSD))**2;
57 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM(((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
58 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))
59 -PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL)*(1-1.5*AJST_VCTO)**-1*(1+(PZ_VCTO-2.5)*AJST_VCTO);
60 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*VL_SDO_CTB;
61
62 /*SE ESPRESTIMO ESPECIALIZADO DE QUALQUER VALOR QUE DEVERA SER TRATADO COMO
63 NO CONTEXTO DE CALCULO DE CORPOTATE*/
64 /*CORPORATE HVCRE*****STAND BY***AGUARDANDO ORIENTACOES*/
65 VL_CRLC=0.12*(1-EXP(-50*PD_AJSD))/(1-EXP(-50))+0.3*(1-(1-EXP(-50*PD_AJSD)))/(1-EXP(-50));
66 AJST_VCTO=(0.11852-0.05478*LOG(PD_AJSD))**2;
67 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM(((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
68 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))-PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL)*
69 (1-1.5*AJST_VCTO)**-1*(1+(PZ_VCTO-2.5)*AJST_VCTO);
70 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*100*VL_SDO_CTB;*/

```

Figura 49: CER - Códigos em SAS - Segunda Parte

```

71
72 IF CD_CTGR_CLI IN (3) THEN /*SME*****SUB PORTFOLIO 3*/
73 DO;
74 VL_CRLC=0.12*(1-EXP(-50*PD_AJSD))/(1-EXP(-50))+
75 0.24*(1-(1-EXP(-50*PD_AJSD))/(1-EXP(-50)))-0.04*(1-(VL_FATM/10**6.5)/45);
76 AJST_VCTO=(0.11852-0.05478*LOG(PD_AJSD))**2;
77 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
78 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))-
79 PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL)*(1-1.5*AJST_VCTO)**-1*(1+(PZ_VCTO-2.5)*AJST_VCTO);
80 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*VL_SDO_CTB;
81 END;
82 ELSE
83 DO;
84 /*VAREJO OUTROS ATIVOS*****TODO O RETAIL*/
85 VL_CRLC=0.03*(1-EXP(-35*PD_AJSD))/(1-EXP(-35))+0.16*(1-(1-EXP(-35*PD_AJSD))/(1-EXP(-35)));
86 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
87 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))-PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL);
88 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*VL_SDO_CTB;
89
90 IF CD_CLSC_PRD_CLI = 5 THEN /*VAREJO CREDITO ROTATIVO*/
91 DO;
92 VL_CRLC=0.04; /*SO ALTERA O VALOR DA CORRELACAO???*/
93 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
94 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))-PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL);
95 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*VL_SDO_CTB;
96 END;
97 ELSE IF CD_CLSC_PRD_CLI = 4 THEN /*VAREJO HIPOTECAS RESIDENCIAIS*/
98 DO;
99 VL_CRLC=0.15; /*SO ALTERA O VALOR DA CORRELACAO???*/
100 EXG_CPTL=(VL_LGD_EXG_CPTL*PROBNORM((1-VL_CRLC)**-0.5*PROBIT(PD_AJSD)+
101 (VL_CRLC/(1-VL_CRLC))**0.5*PROBIT(0.999))-PD_AJSD*VL_LGD_EXG_CPTL);
102 ATV_PDRD_RSCO=EXG_CPTL*12.5*VL_SDO_CTB;
103 END;
104 END;
105 END;
106 RUN; %ERRO;
107 %MEND;

```

Figura 50: CER - Códigos em SAS - Terceira Parte

```

/*Cria o limite superior do Saddlepoint*/
DATA PANDRE.INPUT_SDD;
SET PANDRE.INPUT_SDD;
Z=-LOG(DELTA)/((1/MI)*SumPL);
RUN;

/*Criando Valores Correspondentes de cada Z*/
DATA INPUT_SDDT
SET PANDRE.INPUT_SDD ;
array VZ(86) Z_1 -Z_86;
array ELZ(86);
array PZ_(86);
array PZ2_(86);
array PZ3_(86);
do Z_1 to 86;
ELZ(Z_) =EXP(L*VZ(Z_));
PZ_(Z_) = ELZ(Z_)*PDA*DELTA;
PZ2_(Z_) =ELZ(Z_)*PL*DELTA;
PZ3_(Z_) =ELZ(Z_)*PL_2*DELTA;
end;
run;

```

Figura 51: Aproximações Ponto de Sela - Códigos em SAS - Primeira Parte

```

/*Cálculo Final do Método de Saddlepoint Approximation*/
DATA PANDRE.SSD_EST;
SET PANDRE.SSD_EST;
V1=(SPZ2/(MI-SPZ));
V1_2=V1*V1;
V2=(SPZ3/(MI-SPZ))+V1_2;
N1=ALPHA*V1;
N2=ALPHA*V2;
ND=(1-DELTA)/(1-(SPZ/MI));
W=SIGN(Z)*SQRT(2*(Z*N1-ND));
U=(1-EXP(-Z))*(SQRT(N2));
WU=(1/U)-(1/W);
PW=PROBNORM(W);
PWP=PROBIT(W);
GN=1-(PROBNORM(W)+PROBIT(W)*WT);
PERC=1-(GN);
VAR=U*N1;
RUN;

```

Figura 52: Aproximações Ponto de Sela - Códigos em SAS - Segunda Parte

```

1 %MACRO FIM;
2
3 X CD /DADOS/MPC/INFOCAR;
4 X CHMOD 755 *;
5
6 DATA CONTROLE_TEMPO;
7 FORMAT USUARIO $10.;
8 FORMAT ROTINA $15.;
9 FORMAT HORA_INICIO DATETIME.;
10 FORMAT HORA_FIM DATETIME.;
11 FORMAT TEMPO_GASTO TIME.;
12 FORMAT QTD_REG_OPERACAO COMMA9.;
13 FORMAT QTD_REG_CLIENTES COMMA9.;
14 SET CONTROLE_TEMPO;
15 USUARIO = "&SYSUSERID";
16 ROTINA = "&ROTINA";
17 HORA_FIM = DATETIME0;
18 INDICATIVO_ERRO = "&IND_ERRO";
19 TEMPO_GASTO = HORA_FIM - HORA_INICIO;
20 QTD_REG_OPERACAO = 0;
21 QTD_REG_CLIENTES = 0;
22 RUN;

```

Figura 53: Controle de Tempo de Processamento - Códigos em SAS - Primeira Parte

```

23
24 PROC APPEND BASE=B_DADOS.CTLE_ROTINAS DATA=CONTROLE_TEMPO;QUIT;
25
26 DATA _NULL_;
27 SET CONTROLE_TEMPO;
28 PUT "
29 /" *****CONTROLE TEMPO PROCESSAMENTO*****
30 /"
31 /"
32 /" INICIO ==> "HORA_INICIO DATETIME.
33 /"
34 /" FIM ==> "HORA_FIM DATETIME.
35 /"
36 /" DURACAO ==> "TEMPO_GASTO TIME.
37 /"
38 /"
39 /" &ROTINA
40 /" &DATA_MOVIMENTO
41 /"
42 RUN;
43
44 %MEND;

```

Figura 54: Controle de Tempo de Processamento - Códigos em SAS - Segunda Parte