



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística

## Modelagem de volatilidade no mercado de opções

**Alfredo Rossi Saldanha Cunha**

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Brasília

Março de 2020

# Modelagem de volatilidade no mercado de opções

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. José Augusto Fiorucci (orientador) - EST/UnB
- Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (membro externo) - ICMC/USP
- Prof. Dr. Jhames Matos Sampaio (membro interno) - EST/UnB
- Prof. Dr. André Luiz Fernandes Cançado (suplente) - EST/UnB

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus.

Aos meus pais, família, namorada e cachorro pelo amor, apoio e compreensão.

Ao professor José Augusto Fiorucci pela orientação e sempre considerar minhas opiniões ao longo do projeto. Ao José Carlos Waeny, Jhames Sampaio e André Cançado pelas enormes contribuições no trabalho e ótimas reuniões. Ao grupo de pesquisa LAMFO - UnB e LabEst.

Aos meus amigos da Diretoria, Catan, Pés de Rato, Liga e Schuberry.

Quero agradecer a todos que participaram das minhas experiências de trabalho, acadêmica e pessoais, seja em Brasília ou Lisboa. Muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Epígrafe

Isto é para os loucos. Os desajustados. Os rebeldes. Os criadores de caso. Os que são peças redondas nos buracos quadrados.

Os que veem as coisas de forma diferente. Eles não gostam de regras. E eles não têm nenhum respeito pelo status quo. Você pode citá-los, discorda-los, glorificá-los ou difamá-los.

A única coisa que você não pode fazer é ignorá-los. Porque eles mudam as coisas.

Eles inventam. Eles imaginam. Eles curam. Eles exploram. Eles criam. Eles inspiram.

Eles empurram a raça humana para frente.

Talvez eles tenham que ser loucos.

Enquanto alguns os veem como loucos, nós vemos gênios. Porque as pessoas que são loucas o suficiente para achar que podem mudar o mundo, são as que de fato, mudam.

---

*Steve Jobs*  
*Apple 1997*

# Resumo

O modelo Black and Scholes é o mais utilizado para precificação de opções. Entre as diversas variáveis utilizadas no modelo, a volatilidade é a única não observável, de modo que a qualidade de sua estimação é de vital importância. Diversos estudos utilizam primeiramente modelos de séries temporais (GARCH e outros) para estimar a volatilidade do ativo financeiro e depois estimam o preço da opção via Black and Scholes, desprezando assim o valor da opção que está sendo negociado em bolsa. A presente dissertação tem como proposta estudar o caminho inverso (pouco convencional), isto é, estimar a volatilidade combinando o histórico de preços do ativo e o valor das negociações em bolsa das opções do ativo. É feito um estudo comparativo das estimativas entre diversos modelos (GARCH, EGARCH, HNGARCH, LSTM, além do Black and Scholes e simulações de Monte Carlo) e em diversos cenários (alta/baixa volatilidade, poucos/muitos dias para vencimento, opções ITM/ATM/OTM). Foi realizado um estudo empírico nas opções da Petrobras e Vale no período de 12/2018 à 11/2019, os resultados indicam melhores estimativas (em comparação ao Black and Scholes) para o modelo EGARCH usando simulação de monte carlo e HNGARCH para as probabilidades de exercício das opções e os modelos EGARCH/GARCH usando Black and Scholes e LSTM para precificação das opções.

**Palavras-chave:** GARCH, HNGARCH, LSTM, Simulação, Opções, Volatilidade.

# Abstract

The Black and Scholes is the most used model for option pricing. Among the several variables used in the model, volatility is the only one that is not observable, the quality of its estimation is of vital importance. Several studies use time series models (GARCH and others) to estimate the volatility of the financial asset and then estimate the option price via Black and Scholes, thus neglecting the value of the option being traded on the stock exchange. The purpose of this dissertation is to study the reverse (unconventional) path, that is, to estimate volatility by combining the asset's price history and the value of the stock's options trading. A comparative study of the estimates is made between different models (GARCH, EGARCH, HNGARCH, LSTM, in addition to Black and Scholes and Monte Carlo simulations) and in several scenarios (high / low volatility, few / many days to maturity, ITM/ATM/OTM options). An empirical study was done with the options of Petrobras and Vale from 12/2018 to 11/2019, the results indicate better estimates (compared to Black and Scholes) for the EGARCH model using Monte Carlo simulation and HNGARCH for the probabilities of exercise of options and the EGARCH / GARCH models using Black and Scholes and LSTM for pricing options.

**Keywords:** GARCH, HNGARCH, LSTM, Simulation, Options, Volatility.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão da Literatura . . . . .	3
1.2 Derivativos e opções . . . . .	5
1.2.1 Derivativos . . . . .	5
1.2.2 Opções . . . . .	9
1.2.3 Moneyness . . . . .	13
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	14
<b>2 Modelagem de Volatilidade e precificação de opções</b>	<b>15</b>
2.1 Processo de Markov . . . . .	15
2.2 Processo de Wiener e sua generalização . . . . .	16
2.3 Processo e Lema de Itô . . . . .	18
2.4 Black and Scholes . . . . .	19
2.4.1 Gregas . . . . .	20
2.5 Modelo de Heston . . . . .	28
2.6 Heston Nandi GARCH . . . . .	30
2.7 GARCH . . . . .	34
2.8 Modelo de Redes de Memória de Longo Prazo (Long Short Term Memory, LSTM) . . . . .	40
2.8.1 Otimização Bayesiana (Bayesian Optimization) . . . . .	43
2.8.2 Aplicação LSTM . . . . .	46
2.9 Monte Carlo . . . . .	47
2.10 Volatilidade Implícita e Superfície . . . . .	49
2.10.1 Superfície de Volatilidade . . . . .	51
2.10.2 Equações de Volatilidade . . . . .	52
<b>3 Análise e Resultados</b>	<b>55</b>
3.1 Métricas e Filtros . . . . .	56
3.1.1 Delta . . . . .	56
3.1.2 Call . . . . .	57
3.1.3 Filtros . . . . .	58
3.2 Dados . . . . .	59
3.3 Probabilidade de Exercício (Delta) . . . . .	62
3.3.1 Opções Exercidas . . . . .	72
3.3.2 Opções Não Exercidas . . . . .	78

3.4	Valor opção de Compra (call) . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>90</b>
4.1	Considerações Finais . . . . .	90
4.2	Sugestões para Pesquisas Futuras . . . . .	91
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

1.1	Relação Moneyness [26]	13
2.1	Relação Processos.	19
2.2	Delta pelo moneyness [26].	21
2.3	Delta pelo Tempo [26].	22
2.4	Estrutura rede LSTM [12].	46
2.5	Distribuição do preço para ação simulada com forma e assimetria do GARCH.	48
3.1	Evolução dos preços de fechamento da Petrobras e da Vale.	60
3.2	Comparação Petr. modelos métrica probabilidade exercício.	63
3.3	Comparação Vale. modelos métrica probabilidade exercício.	64
3.4	Exemplo Interpretação Dispersão.	66
3.5	Comparação Petr. Probabilidade Exercício modelos 1 × BS.	68
3.6	Comparação Petr. Probabilidade Exercício modelos 2 × BS.	69
3.7	Comparação Vale. Probabilidade Exercício modelos 1 × BS.	70
3.8	Comparação Vale. Probabilidade Exercício modelos 2 × BS.	71

# Lista de Tabelas

1.1	Moneyneess segundo o Delta ( $\Delta$ ) . . . . .	14
2.1	Tabela cálculo volatilidade implícita. . . . .	51
3.1	Análise descritiva Petrobras. . . . .	61
3.2	Análise descritiva Vale. . . . .	61
3.3	Delta Todas opções Exercidas. . . . .	74
3.4	Delta Filtro Temporal opções Exercidas. . . . .	75
3.5	Delta Filtro Moneyneess opções Exercidas. . . . .	76
3.6	Delta Filtro Volatilidade opções Exercidas. . . . .	77
3.7	Delta Todas opções Não Exercidas. . . . .	80
3.8	Delta Filtro Tempo opções Não Exercidas. . . . .	81
3.9	Delta Filtro Moneyneess opções Não Exercidas. . . . .	82
3.10	Delta Filtro Volatilidade opções Não Exercidas. . . . .	83
3.11	Call Todas opções. . . . .	86
3.12	Call Filtro Temporal. . . . .	87
3.13	Call Filtro Moneyneess. . . . .	88
3.14	Call Filtro Volatilidade. . . . .	89

# Capítulo 1

## Introdução

Modelagem de volatilidade consiste em um dos principais objetivos quando se trata do estudo de séries temporais financeiras. Nestas séries a suposição de homocedasticidade (variância constante no tempo) dificilmente é verificada, ou ainda que a variância incondicional seja constante, raramente a variância de um ponto condicionado no seu histórico será constante. Processos com este comportamento são chamados de condicionalmente heterocedástico e a variância condicional é usualmente referida como volatilidade. Vale citar que na literatura, algumas vezes o termo volatilidade é também utilizado para se referir ao desvio padrão condicional.

Na prática, a volatilidade pode ser entendida como um termômetro de um ativo financeiro (ou de uma carteira de ativos), de modo que se a volatilidade está alta, então fortes oscilações são esperadas, o que pode trazer grandes lucros ou prejuízos.

Se a volatilidade está baixa, então o risco é pequeno, bem como os lucros esperados. De modo geral, as ações possuem volatilidade elevada quando comparadas a títulos do governo e de empresas de baixo risco. Entretanto, os derivativos financeiros, em especial as opções, possuem uma volatilidade ainda maior. Desta forma, a estimação da volatilidade é de fundamental importância no delineamento de estratégias de negócios, para a sua gestão

de risco, bem como para a precificação de derivativos.

O modelo Black and Scholes é o mais famoso e utilizado para precificação de opções [17]. Entre as diversas variáveis utilizadas no modelo, a volatilidade é a única não observável, de modo que a qualidade de sua estimação é de vital importância. Diversos estudos utilizam primeiramente modelos de séries temporais (GARCH e outros) para estimar a volatilidade do ativo financeiro e depois estimam o preço da opção via Black and Scholes [8], desprezando assim o valor dos derivativos que estão sendo negociados em bolsa. Por outro lado, o caminho inverso (pouco convencional), chamado de volatilidade implícita, consiste basicamente em inverter o modelo de Black and Scholes a partir dos valores dos derivativos e assim obter uma estimativa da volatilidade [9], neste caso, o valor dos derivativos é aproveitado, mas a dinâmica da movimentação dos preços (histórico do ativo) é ignorada.

Essa dissertação tem como proposta estudar as duas abordagens e confrontá-las, utilizando diversos modelos famosos na literatura e comparando os resultados em diversos cenários relevantes como tempo para vencimento, volatilidade e distância da opção para o ativo principal, também foi avaliado um modelo híbrido que combina ambas abordagens. Foi tomado como base os principais ativos e derivativos negociados na bolsa de valores brasileira (B3).

O objetivo principal consiste em melhorar a precificação de opções bem como a precisão do cálculo da probabilidade de exercício (conhecido como Delta). Para estimar a volatilidade, a abordagem proposta para este trabalho utiliza uma quantidade maior de informações vindas do mercado quando comparada a abordagem usual (via séries temporais), uma vez que, além do histórico de preços do ativo, também é utilizado o valor de negociação das opções.

## 1.1 Revisão da Literatura

Os artigos mais relevantes utilizados nessa dissertação seguem abaixo com uma breve descrição.

O artigo A Closed-Form GARCH Option Valuation Model [13] foca no modelo GARCH, com e sem restrição do parâmetro de assimetria. O modelo permite avaliar uma opção utilizando volatilidades pontuais calculadas diretamente a partir do histórico de retornos de ativos sem necessariamente usar as volatilidades implícitas inferidas de outras opções contemporâneas.

Outro artigo relevante é An empirical comparison of GARCH option pricing models [16]. O artigo traz uma comparação entre os modelos NGARCH (não linear GARCH) e HN (Heston e Nandi), mostrando que o modelo fornece uma melhoria substancial no modelo ad-hoc de Black Scholes de Dumas, Fleming e Whaley (1998) que usa uma volatilidade implícita para cada opção para ajustar o "sorriso da volatilidade", isso se deve a capacidade do modelo de capturar a correlação de volatilidade com retornos e a dependência no tempo da própria volatilidade. O modelo NGARCH se mostrou mais efetivo por conseguir ter e manter um baixo viés.

The pricing options on assets with stochastic volatilities [14] é um artigo que desenvolve uma fórmula de avaliação de opção fechada para um ativo à vista cuja variação segue um processo GARCH (p, q) que pode ser correlacionado com os retornos do ativo à vista. Ele fornece a primeira fórmula de opção prontamente calculada para um modelo de volatilidade aleatória que pode ser estimado e implementado apenas com base em informações observáveis. Quando a volatilidade é estocástica, o preço do modelo de Black and Scholes

(BS) tende a sobre precificar as opções no dinheiro e a sub precificar opções que estão muito dentro ou muito fora do dinheiro.

The Volatility Smile and Its Implied Tree [20]. O artigo aborda o algoritmo de árvore implícita e como ele soluciona o problema de diferentes volatilidades para diferentes valores de exercício (“Volatility smile”). A árvore implícita faz uma alteração na equação de Black and Scholes, mudando o termo de variância constante por um de variância dependente do tempo e preço do ativo subjacente. Essa metodologia sugere que qualquer uma das opções nas quais ela é baseada, será produzido valores que correspondem aos preços de mercado observados. Dessa árvore pode-se calcular tanto a distribuição quanto a volatilidade do índice em tempos futuros e níveis de mercado, como sugerido por preços das opções.

O artigo Statistical Tests of contingent-claims asset-pricing models: A new Methodology [21] propõe o uso de teste de hipóteses para comparação do preço estimado com o observado. Portanto, a estimação para o preço acaba passando por estimar volatilidade, sob modelo de Black and Scholes. Por meio da máxima verossimilhança (MV) é apresentado a teoria de normalidade assintótica para a volatilidade e utilizando o método delta (expansão da série de Taylor) para chegar na normalidade assintótica do preço. Foram realizadas simulações de monte carlo para estimar o preço e volatilidade e calcular a estatística do teste normal, também foram realizados os testes t e qui-quadrado para validação.

O artigo Forecasting the volatility of stock price index: A hybrid model integrating LSTM with multiple GARCH-type models [12] propõe um novo modelo híbrido de memória de longo prazo (LSTM) para prever a volatilidade do preço das ações que combina o modelo LSTM com vários modelos do tipo GARCH. Além disso, comparam o desempenho com as metodologias existentes, analisando modelos únicos, como GARCH, EGARCH, mé-

dia móvel ponderada exponencialmente, uma rede neural profunda de feedforward (DFN) e o LSTM, bem como os modelos híbridos de DFN. Pelos resultados o modelo GEW-LSTM, um modelo híbrido proposto que combina o modelo LSTM com três modelos do tipo GARCH, apresentou os menores erros de previsão. Os resultados mostram que a utilização de uma rede neural combinada com modelos econométricos para precificação, permite obter estimativas mais próximas dos valores negociados em bolsa, quando comparada as estimativas dos modelos individuais. A metodologia utilizada pode ser estendida para prever a volatilidade do mercado de ações.

## 1.2 Derivativos e opções

Essa seção tem como objetivo introduzir os conceitos mais relevantes para compreensão do trabalho na parte de finanças, são apresentando os tipos de derivativos e suas aplicações. Depois aprofunda-se os detalhes em opções com exemplos e é introduzido o conceito de moneyness que será utilizado posteriormente nas análises.

### 1.2.1 Derivativos

Os derivativos se originaram anteriormente aos mercados financeiros como conhecemos hoje. Inicialmente eles eram contratos estabelecidos entre produtores e comerciantes de produtos agrícolas. Um dos exemplos mais antigos documentados é o relato de Aristóteles, na sua obra “A Política”, onde ele relata que o filósofo Tales previu uma grande safra de azeitonas com um ano de antecedência. Dessa forma, alugou por baixo custo todas as prensas de azeite da região. Com a chegada da safra prevista, os produtores foram obrigados a alugar de Tales as prensas a um custo bem mais alto [22].

São uma categoria de ativos financeiros no qual o seu valor depende é de um contrato

mútuo, no qual se estabelece um valor econômico derivado do valor temporal (tempo de contrato) e do ativo adjacente (ou do grupo de ativos adjacentes), como ações, títulos, commodities, moedas, taxas de juros e índices de mercado. O seu nome é pelo fato de derivar do ativo objeto, por isso é conhecido como derivativo. Os derivativos possuem diversas utilidades, entre elas a proteção contra algum risco de mercado específico, a sintetização do comportamento de um ativo (dando assim mais liquidez para operações com ele) e alavancagem de posições.

O derivativo utiliza como base o valor assumido por uma variável como o preço de um outro ativo (ação ou commodity), a inflação, a taxa de câmbio, a taxa básica de juros ou qualquer outra variável com significado econômico e acordada entre as duas partes.

Desvalorização cambial e variações bruscas nas taxas de juros são exemplos de situações que já ocorreram na economia, nas quais os prejuízos foram reduzidos ou até se transformaram em ganhos para os agentes econômicos que protegeram os seus investimentos realizando operações com derivativos. Empresas que estão expostas a flutuações cambiais ou possuem riscos de fenômenos naturais utilizam derivativos para proteger sua receita independente se ocorrer algum cenário adverso. Muitos fundos de investimento utilizam um tipo de derivativo chamado de opção (será apresentado logo a frente) para efetuar hedge (proteger operações financeiras contra o risco de grandes variações de preço de um determinado ativo).

Existem vários tipos de derivativos, o mais popular são as opções que se difundiram pela fama de diversos modelos teóricos como o Black & Scholes. Esse modelo e outros serão abordados com mais detalhes adiante.

Os principais tipos de contrato derivativo são [3]:

- A Termo: é um dos derivativos mais básicos e simples, o comprador e vendedor se comprometem a comprar ou vender, em data futura, certa quantidade de um ativo, a um preço fixado na própria data da celebração do contrato. Os contratos a termo somente são liquidados integralmente na data de vencimento, podendo ser negociados em bolsa e no mercado de balcão;
- Futuros: possuem um comportamento semelhante ao termo, mas com compensação diária. O comprador ou vendedor se compromete a comprar ou vender certa quantidade de um ativo por um preço estipulado numa data futura. No mercado futuro, os compromissos são ajustados diariamente às expectativas do mercado referentes ao preço futuro do bem, por meio do ajuste diário (mecanismo que apura perdas e ganhos), como forma de garantir que as partes honrarão o compromisso. Os contratos futuros são negociados somente em bolsas;
- Swaps: fluxo de pagamentos entre as partes contratantes, em diversas datas futuras. Negocia-se a troca (Swap) do índice de rentabilidade entre dois ativos. Muitas empresas exportadoras que recebem em moeda utilizam para trocar os fluxos de pagamentos das suas obrigações, anulando o risco cambial de uma e o risco de inflação da outra. O swap, no entanto, implica um certo risco. Variações inesperadas nos indexadores das dívidas podem eventualmente prejudicar um dos contratantes, prejudicando o outro. Tal como a operação a termo, a operação de swap é liquidada integralmente no vencimento.
- Opção: é o único derivado que dá a opção e não a obrigação de trocar os fluxos de caixa, é um derivado não linear que fornece um "prêmio" para se adquirir a opção.

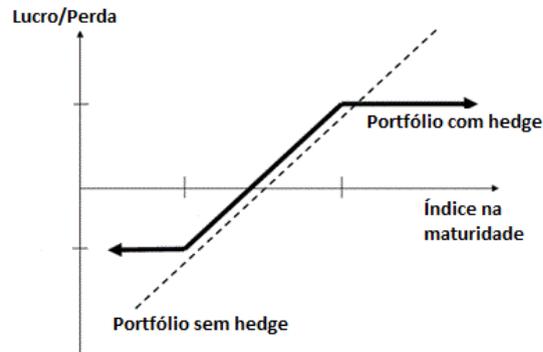
Por ser o derivado mais com maior foco nessa dissertação será abordado na próxima seção com mais detalhes.

Como já comentado, entre as possibilidades proporcionadas pelos derivativos existem as operações de hedge, que não tem como objetivo proporcionar ganhos ou perdas, servem para fixar o preço em uma data futura. A operação de hedge precisa ser avaliada como um todo. Existem vários tipos de hedge, um dos mais comuns é a compra de opções de dólar para que as empresas não tenham seu faturamento exposto as variações no cambio. Dessa forma, as empresas adquirem o direito de comprar o dólar a um determinado preço no futuro e, para isso, é preciso desembolsar parte do valor, que é o prêmio. Mas está protegido caso aconteça uma alta forte no dolar. Um exemplo no mercado de índices é dado por [23] (os termos e operações de opção serão melhor explicados na próxima seção):

Para proteger um portfólio com opções de índice, precisamos também primeiro selecionar um índice (ou índices) com uma alta correlação com o portfólio que desejamos proteger. Por exemplo, se nosso portfólio consiste em parte de ações de tecnologia, utilizar opções do Nasdaq Composite Index pode ser uma boa escolha; se o portfólio for composto principalmente de empresas de primeira linha, o Dow Jones Industrial Index pode ser mais adequado.

Como exemplo, adotaremos o índice *S&P500*. Depois de determinar o índice a ser usado, calculamos quantos contratos de compra e venda são comprados e vendidos para proteger completamente o portfólio usando a seguinte fórmula:

$$\text{N}^\circ \text{ Opções de índice necessárias} = \frac{\text{Valor da participação}}{(\text{Nível de índice} \times \text{Multiplicador de contrato})}$$



### 1.2.2 Opções

Opções são contratos que dão o direito, mas não a obrigação, ao comprador de comprar ou vender um determinado ativo (ação, título ou bem qualquer) a um determinado valor (o preço de exercício da opção, chamado de Strike) e data pré-determinada.

As opções são negociadas em bolsas assim como as ações, no Brasil são negociadas na B3. Na B3 são negociadas opções no mercado à vista como as opções de ações, de índice da Bovespa, de Dólar Americano, de ouro. No mercado futuro, existem opções sobre futuros de mercadorias (açúcar, álcool, algodão, boi gordo, soja, café). Além disso existem as opções de séries padronizadas e as opções flexíveis que permitem que as partes envolvidas na negociação definam data, preço de exercício e qualidade da mercadoria diferente das séries padronizadas [7].

As opções podem ser de compra (call) ou venda (put) e europeias (o contrato não pode ser exercido antes da data de vencimento) ou americanas (o contrato pode ser exercido em qualquer momento até a data de vencimento), nessa dissertação será analisado apenas opções de compra, mas pode-se estender de forma fácil para opções de venda. Além dessas classificações, uma opção pode ser considerada como fora do dinheiro (do inglês out the

money, OTM), dentro do dinheiro (do inglês in the money, ITM) ou no dinheiro (do inglês at the money, ATM). De forma geral, para a opção ser considerada fora do dinheiro, o seu Strike deve ser bem maior que a cotação praticada no mercado, para ser considerada dentro do dinheiro o seu Strike deve ser bem menor que a cotação praticada no mercado e para ser considerada no dinheiro o seu Strike deve ser bem próximo da cotação praticada no mercado. Posteriormente será apresentado critérios objetivos do que está sendo considerado em cada caso nesse trabalho.

Uma opção de compra, dá o direito ao comprador de, em determinada data futura, comprar um ativo da opção a um preço pré-estabelecido. Já uma opção de venda dá direito ao seu comprador de, em determinada data futura, vender um ativo (ou derivativo) ao vendedor da opção a um preço pré-estabelecido. Na prática, duas situações que ilustram esses cenários seriam: uma apólice de seguro de automóvel (opção de venda), após o pagamento do contrato é possível recuperar um valor predeterminado pelo ativo, mesmo que tenha acontecido alguma batida grave (desvalorizando muito o ativo). O outro exemplo é o sinal pago na compra de um imóvel (opção de compra), pois garante o preço fixo e a preferência na compra independente da valorização ou desvalorização devido a alguma melhoria na vizinhança do imóvel.

Atualmente, empresas se utilizam de opções como forma de bonificação de seus funcionários de forma que sejam impulsionados a buscar melhores resultados e a empresa se valorizar e seus bônus aumentarem. A opção permite que o beneficiário compre ações da empresa a um valor abaixo do mercado, podendo auferir bons lucros no longo prazo.

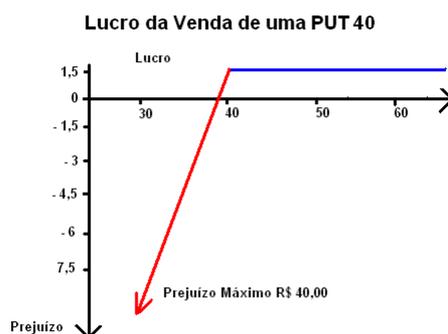
Portanto, o resumo de alguns conceitos importantes são:

- Call: opção de compra;
- Put: opção de venda;
- Strike: valor definido na opção como limiar para que a opção tenha valor ou não no dia da maturidade;
- Tipo Americana: o contrato de opção pode ser exercido antes da data de vencimento;
- Tipo Européia: o contrato de opção não pode ser exercido antes da data de vencimento;
- ITM: opções que o valor do ativo subjacente é bem superior ao valor do strike;
- ATM: opções que o valor do ativo subjacente é próximo ao valor do strike;
- OTM: opções que o valor do ativo subjacente é bem inferior ao valor do strike;

Um exemplo do livro [15] é a compra de uma opção da Petrobras com preço de exercício de R\$40 e data de vencimento para abril. Isso significa dizer que você tem o direito de comprar ações da Petrobras a R\$40 até o dia do vencimento da opção (terceira segunda-feira de abril). Para ter esse direito você paga um preço ou um prêmio que não fará parte do negócio se exercer seu direito (comprar a ação). Você pagou pelo direito isoladamente. Tal direito irá se valorizar ou desvalorizar, e você poderá exercê-lo ou vendê-lo no mercado. Exercer uma opção significa exatamente exercer seu direito sobre a opção, ou seja, comprar o ativo-objeto ao preço de exercício da opção, o preço ao qual você tinha direito. Você dá uma ordem para exercer a opção, ela deixa de existir, e o vendedor dela é obrigado a lhe vender a quantidade estipulada de ações (mesma quantidade que você possuía da opção)

ao preço predeterminado (R\$40). Ocorre uma operação de compra da ação. Ser exercido é o outro lado. Você está vendido na opção, e se o comprador exerce seu direito, você tem de entregar a ação ao preço de exercício da opção. Se tiver a ação e ela estiver como garantia da venda da opção, você venderá suas ações. Se não tiver, é preciso comprar ao preço de mercado para entregar ao comprador.

O exemplo acima aborda uma estratégia (entre várias existentes) chamada venda coberta, na qual se baseia na compra de uma ação (ou qualquer outro ativo) inicialmente e depois é feita a venda da opção referente ao mesmo ativo, por isso se chama venda coberta (a venda está coberta pelo ativo que foi comprado inicialmente).



Ao observarmos a Figura 1.2.2 de [18], vemos que o lucro da venda da opção de exemplo vai ocorrer se o preço da ação não ultrapassar o valor do Strike (R\$40) mais o prêmio. Portanto, o objetivo dessa estratégia é que conforme o tempo passe e a ação não aumente seu valor, o investidor vai ganhando o prêmio. Caso a ação se valorize muito e ultrapasse o valor do Strike mais o prêmio, o investidor começaria a ter prejuízo na opção e teria duas alternativas, ou compra a opção de compra para anular a venda e manter o ativo objeto que vai estar registrando lucro ou espera pela data de vencimento e, caso de fato seja exercido, entregar o ativo objeto e ficar apenas com o prêmio recebido no início da operação.

Figura 1.1: Relação Moneyness [26]



### 1.2.3 Moneyness

O moneyness de uma opção se refere à relação entre o preço do ativo e o preço de exercício em um determinado tempo. Como já discutido, se o preço do ativo estiver próximo, muito acima ou muito baixo do preço de exercício, a opção será considerada como ATM, ITM e OTM, respectivamente. A figura 1.1 abaixo representa graficamente esses três conceitos.

Segundo [6] a probabilidade de uma opção ser exercida (grega delta do Black and Scholes discutida no próximo capítulo) é muito utilizado como critério para definir o moneyness de uma opção. Uma opção no dinheiro (ATM) possui delta na vizinhança de 0,5 (call) ou  $-0,5$  (put), ou seja, há 50% de chance de que a opção seja exercida. Se o delta da opção é de 0,8 (call) ou 0,8 (put), a opção está dentro do dinheiro (ITM), uma vez que a chance de ser exercida é de 80%. A tabela 1.1 a seguir apresenta as classificações do moneyness das opções de acordo com os deltas (nesse trabalho serão agrupados as categorias deep OTM e deep ITM com OTM e ITM, respectivamente).

**Tabela 1.1:** *Moneyness segundo o Delta ( $\Delta$ )*

Call	Put	Moneyness
$\Delta_c \leq 0,35$	$\Delta_p \geq -0,35$	OTM
$0,35 \leq \Delta_c \leq 0,75$	$-0,35 \geq \Delta_p \geq -0,75$	ATM
$\Delta_c \geq 0,75$	$\Delta_c \leq -0,75$	ITM

### 1.3 Organização do Trabalho

A organização desse trabalho se inicia com o Capítulo 2 se aprofundando e apresentando os conceitos e metodologias dos principais modelos para estimação da volatilidade e suas variações, fatos estilizados sobre o mercado e como os modelos podem captar esse efeito. No Capítulo 3 são definidas as métricas para comparação e a análise dos dados. O Capítulo 4 encerra trazendo as principais conclusões e contribuições.

## Capítulo 2

# Modelagem de Volatilidade e precificação de opções

Esse capítulo introduz os conceitos mais relevantes de estatística para compreensão do trabalho. O capítulo começa com o processo de Markov, depois discorre sobre processo de Wiener e sua generalização até o caso particular de Black and Scholes (explorando a definição e importância de cada uma das 5 gregas), modelos de volatilidade estocástica como Heston, GARCH (e suas principais variações com distribuições mais condizentes com os pressupostos de finanças como assimetria e caudas pesadas) e Heston Nandi GARCH, modelo de rede neural LSTM e otimização bayesiana, método de simulação de Monte Carlo e finalizando com os conceitos de volatilidade implícita e superfície de volatilidade. Também é abordado as 3 equações utilizadas para resumir a superfície de volatilidade para o modelo de Black and Scholes.

### 2.1 Processo de Markov

O Processo de Markov é um processo estocástico onde somente o valor atual da variável é relevante para prever a evolução futura do processo (depende apenas de 1 período já realizado). Valores históricos (caminho realizado) através do qual a variável atingiu o

seu valor atual são irrelevantes para a determinação do seu valor futuro. Nesse modelo, assumimos que o preço atual de uma ação reflete todas as informações históricas bem como as expectativas a respeito do preço futuro desta ação

Definição: Um processo estocástico discreto é um processo de Markov se

$$P(X_{t+1} = S | X_0, X_1, \dots, X_t) = P(X_{t+1} = S | X_t)$$

para todo  $t \geq 0$  e  $S$ .

## 2.2 Processo de Wiener e sua generalização

O processo de Wiener é um processo estocástico de tempo contínuo, chamado também de movimento browniano pela sua relação com o processo físico conhecido como movimento browniano observado por Robert Brown. É um processo de Lévy frequentemente estudado na matemática pura e aplicada, economia, matemática financeira (Black and Scholes é baseado nesse conceito) e física.

Esse processo é um caso particular do processo Markoviano, no qual considera que a única informação necessária para determinar o estado futuro é o estado atual (não é necessário a memória do restante do processo), em que a distribuição é normal com média 0 e variância 1.

O processo é definido de tal forma que as seguintes proposições sejam satisfeitas [17]:

- Propriedade 1: A mudança  $\Delta Z$  durante um período curto  $\Delta t$  é:  $\Delta Z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$ , no qual  $\epsilon$  possui distribuição Normal padrão.
- Propriedade 2: Os valores de  $\Delta Z$  para quaisquer dois intervalos curtos de tempo diferentes,  $\Delta t$ , são independentes. Logo, segundo a primeira propriedade,  $\Delta Z$  em si

tem distribuição normal com média zero e variância  $\Delta t$ .

Ou seja, a segunda propriedade especifica as características de um processo markoviano e a primeira identifica a distribuição específica para não ser qualquer processo markoviano. Além disso, a segunda propriedade é derivada do fato de que a esperança da variação entre os estados é zero porque a esperança do termo aleatório ( $\epsilon$ ) é zero e para a variância o termo de variação do tempo é uma constante (que é elevada ao quadrado pela variância), a variância do termo aleatório é 1 e são independentes. Essa condição faz os termos de covariância serem nulos e a variância do processo ser apenas a variação do tempo.

A generalização do processo de Wiener ocorre quando se considera que a variação não é constante em  $\Delta z$ , no caso do processo simples a taxa de variância é 1 e significa que a variância da mudança em  $z$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é igual a  $\Delta t$  (constante para todas as diferenças). Portanto, para incorporar no processo, denotado agora por  $dz$ , essa variabilidade é definido pela seguinte equação:

$$dx = a dt + b dz$$

no qual  $a$  e  $b$  são constantes.

Para entender a equação é útil considerar os dois componentes no lado direito separadamente. O termo  $a dt$  implica que  $x$  tem uma taxa de deriva esperada de  $a$  por unidade de tempo. Sem o termo  $b dz$  a equação é  $dx = a dt$  que implica que  $\frac{dx}{dt} = a$ . Integrando com relação ao tempo, obtemos:  $x = x_0 + at$ , onde  $x_0$  é o valor de  $x$  no tempo 0. Em um período de tempo de duração  $T$ , a variável  $x$  aumenta na quantidade  $aT$ . O termo  $b dz$  no lado direito da equação pode ser considerado como adicionando ruído ou variabilidade ao caminho seguido por  $x$ . O nível desse ruído ou variabilidade é  $b$  vezes um processo de

Wiener. Um processo de Wiener tem uma taxa de variância por unidade de tempo é igual a 1. Logo,  $b$  vezes um processo de Wiener tem uma taxa de variância por unidade de tempo de  $b^2$ .

### 2.3 Processo e Lema de Itô

O processo de Itô acontece quando a generalização do processo de Wiener assume que os termos  $a$  e  $b$  da equação são funções do valor do ativo ( $x$ ) e do tempo ( $t$ ), fornecendo a seguinte fórmula:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

A taxa de deriva e a taxa de variância esperadas de um processo de Itô podem mudar com o tempo. Em um pequeno intervalo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ , a variável muda de  $x$  para  $x + \Delta x$ , onde,  $\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$ .

Essa equação envolve uma pequena aproximação. Ela pressupõe que a taxa de deriva e de variância de  $x$  permanecem constantes, iguais a seus valores no tempo  $t$ , durante o intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ .

O lema de Itô por [17] é definido como, para uma função qualquer  $G$  de  $x$  e  $t$  segue o processo:

$$dG = \left( \frac{dG}{dx} + \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dx^2} b^2 \right) dt + \frac{dG}{dx} b dz$$

No qual  $dz$  é o mesmo processo de Wiener que na equação. Assim,  $G$  também segue um processo de Itô, com taxa de deriva de:  $\frac{dG}{dx}a + \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dx^2} b^2) dt$ . E a taxa de variância de:  $\frac{dG}{dx}^2 b^2$ .

A partir desse lema de Itô que o modelo Black and Scholes é elaborado, é enunciado a

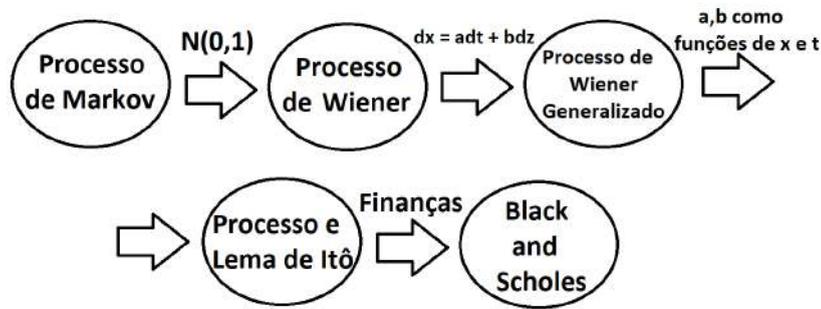


Figura 2.1: *Relação Processos.*

relação entre preço do ativo, taxa livre de risco, volatilidade e suas gregas.

De forma geral, podemos verificar as condições específicas para que se possa entender toda estrutura descrita nos itens anteriores de forma simplificada na Figura 2.1.

## 2.4 Black and Scholes

O modelo proposto por [1] surgiu na década de 70 e até hoje é utilizado como modelo padrão para precificação de opções [15]. O modelo foi derivado para opções de compra (call) to tipo européia, as quais possuem tempo para vencimento fixo (pré definido), bem como, taxa livre de risco constante e conhecida (no Brasil, a taxa Selic).

Black and Scholes admitiram que a movimentação de preços do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico, sendo a tendência e a volatilidade constantes ao longo do tempo. Desta forma, a variação de preços é descrita pela seguinte equação:

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW(t)$$

no qual  $S(t)$  é valor do ativo subjacente no tempo  $t$ ,  $\mu$  é a tendência,  $\sigma$  é a volatilidade de  $S$  e  $dW(t)$  é processo estocástico em relação ao ativo  $S$ .

Portanto, é uma aplicação que possui as características de um processo de Itô.

A partir da fórmula de Black and Scholes é possível chegar nas seguintes equações para precificação de opções do tipo Call e do tipo Put:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$P(S, t) = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

no qual  $K$  é o preço de exercício da opção (Strike),  $N(\cdot)$  é a distribuição normal acumulada padronizada,  $r$  é a taxa livre de risco e  $T$  é data do vencimento das opções.

#### 2.4.1 Gregas

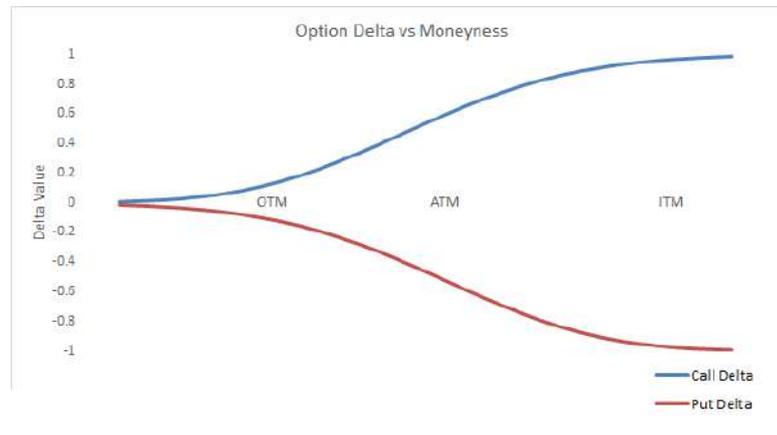
A partir da equação de Black and Scholes é possível calcular as gregas, que são as derivadas parciais em relação ao preço, volatilidade, tempo e a taxa livre de risco. De acordo com [15], abaixo está listado o nome de cada grega com a respectiva interpretação e utilidade.

- **Delta,  $\Delta$  (derivada no preço):**

À medida que o preço da ação subjacente flutua, os preços das opções também mudam, mas não da mesma magnitude ou mesmo necessariamente na mesma direção.

Existem muitos fatores que afetam o preço, é por isso que o delta é importante, ele indica o quanto o preço da opção irá se alterar se o preço do ativo mudar em uma unidade. É a derivada parcial do prêmio da opção em relação ao preço do ativo.

Uma propriedade importante e também muito explorada da grega delta é que, para o



**Figura 2.2:** *Delta pelo moneyness [26].*

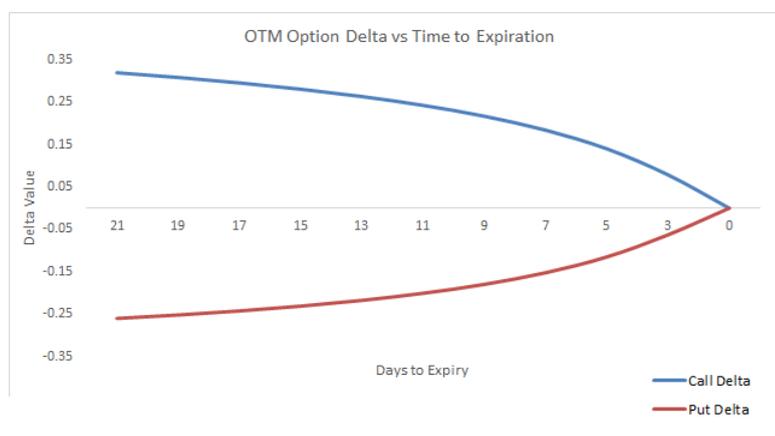
modelo de Black and Scholes, a delta coincide com a probabilidade da opção vir a ser exercida no vencimento, isto é, a chance da opção estar ITM na data de vencimento.

Quando a opção é ATM, ou seja, quando o valor do delta está próximo de 0,50, há uma chance igual de que a opção esteja no dinheiro na data de vencimento, ou seja, que a ação estará sendo negociada acima do strike da opção de compra ou menor que o preço de strike da opção de venda.

Mudanças no delta à medida que o preço das ações se afasta do strike alteram a probabilidade de a ação atingir esses níveis. Pode-se dizer que uma opção de compra que mostra um delta de 0,10 tem 10% de probabilidade de a ação terminar acima do preço de exercício da call até a data de vencimento [26].

Este é um gráfico que ilustra a mudança no delta das opções de compra e venda, à medida que cada opção passa de fora do dinheiro para no dinheiro e, finalmente, dentro do dinheiro.

A alteração no valor do delta não é linear, exceto quando a opção está profundamente dentro do dinheiro (parte a direita do gráfico). Quando a opção for muito ITM, o



**Figura 2.3:** *Delta pelo Tempo [26].*

delta será 1 e, nesse ponto, será equivalente ao ativo subjacente.

Este gráfico representa uma call e put fora do dinheiro. A opção de compra possui um preço de exercício de \$ 26 e a opção de venda possui um preço de exercício de \$ 24. O preço da ação neste exemplo permanece constante e igual à \$ 25. O eixo horizontal mostra os dias até a expiração. As calls e as puts tem aproximadamente delta  $\pm 0,25$  com 21 dias para a expiração. À medida que o tempo diminui, há cada vez menos chances de ambos expirarem ITM, de modo que o delta correspondente para cada opção se aproxima de zero quando a data de vencimento se aproxima.

- **Gamma,  $\Gamma$  (segunda derivada no preço, aceleração):**

A grega gama mede a taxa de alteração do delta da opção. Seu número é indicado em relação a um movimento de uma unidade no ativo subjacente. Por exemplo, se a gama de uma opção mostrar 0,015 com um delta de 0,45, uma mudança de uma unidade no preço (exemplo, se o preço mudar de \$35 para \$36) significa que o delta se moverá para 0,465 [26].

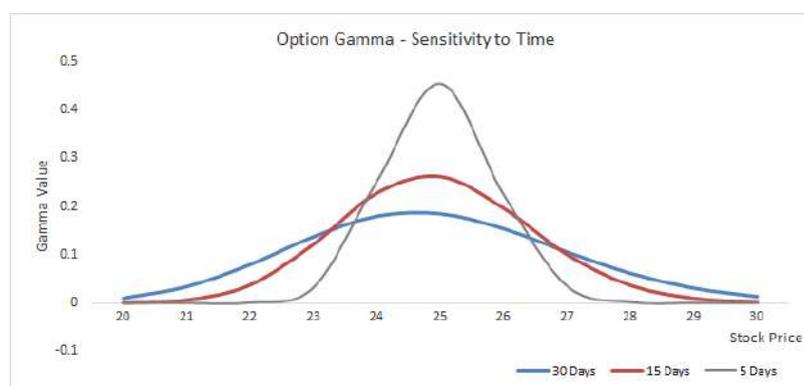
A importância da gama de uma opção é o fato do delta de uma opção não ser

constante. O delta se altera à medida que o preço do ativo subjacente se move. Como o delta é essencialmente o valor da posição no ativo subjacente, a grega Gama, portanto, informa a que velocidade a sua posição aumentará ou diminuirá de valor de acordo com os movimentos do ativo subjacente.

Portanto, a Gama mostra o quão volátil uma opção é relativa aos movimentos no ativo subjacente. Assim, observar sua Gama permitirá que você saiba o tamanho do seu delta (risco de posição) alterado.

Um contrato de opção com mais tempo tem mais probabilidade dessa opção expirar ITM. A volatilidade mais alta também aumenta as chances de uma opção subir de preço, tanto a volatilidade quanto o tempo têm o mesmo efeito no valor Gama de uma opção.

Embora adicionar mais tempo a uma opção aumente o valor da opção, geralmente reduz o Gama da opção por ela também não ser constante. Quanto maior o tempo para expirar, a opção se torna menos sensível aos movimentos no ativo subjacente. No entanto, à medida que a opção se aproxima de sua data de vencimento, seu valor no tempo passará para zero e, em seguida, se tornará mais sensível a alterações no preço subjacente, que é o que a Figura 2.4.1 mostra [26].



Assim, a Gama se torna mais alta quando é ATM e está próximo do vencimento.

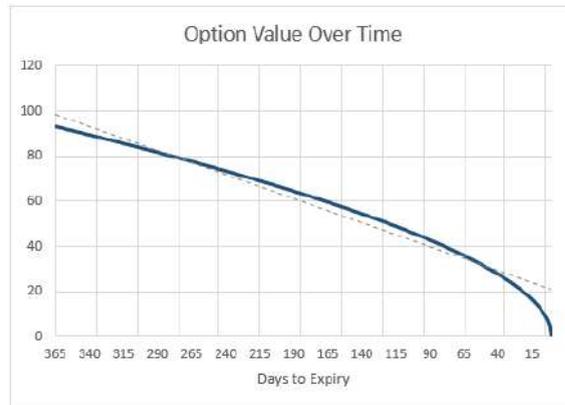
Quando isso acontece, as posições das opções terão as maiores flutuações no Delta.

- **Theta  $\Theta$  (derivada no tempo):**

O Theta, que é caracterizado como decaimento do tempo, descreve a taxa na qual o valor de uma opção é diminuído à medida que um dia de negociação passa, mantendo os demais fatores inalterados. À medida que a opção se aproxima da data de vencimento, a probabilidade de uma opção variar muito em relação ao ativo diminui [26].

Toda opção, possui um valor de tempo zero no vencimento, dia do vencimento (usualmente 3 segunda feira do mês), e só valerá seu valor intrínseco se exercido. Assim, durante a vida de uma opção, o valor do tempo está diminuindo a cada dia, considerando o preço do ativo constante. A grega Theta estima quanto a alteração de um dia impacta no valor da opção.

Portanto, o Theta é a sensibilidade do preço de uma opção conforme o tempo de vencimento. Conforme mostra a imagem abaixo, quanto mais próximo do vencimento menor é o valor da opção de forma que inicialmente o decaimento é menor e se acentua no final [26].



As opções que possuem volatilidades implícitas mais altas também terão Theta's mais altos do que as de volatilidade mais baixa. Isso ocorre porque a volatilidade possui o mesmo efeito (direcionalmente) do tempo quando se trata de opções.

Se, por exemplo, o mercado não se mover, sua posição sofrerá uma mudança aproximada de acordo com o valor Theta. Grandes movimentos no preço (volatilidade alta) podem criar oportunidades para a lucratividade de uma opção. Movimentos no preço e o efeito que o movimento terá sobre a probabilidade da opção é exatamente a grega Gamma.

Portanto, o Gamma tem uma relação inversa com Theta. Caso o Theta seja negativo, é de interesse um movimento grande no preço da ação, portanto, um Gamma positivo.

- **Vega  $\kappa$  (derivada na volatilidade):**

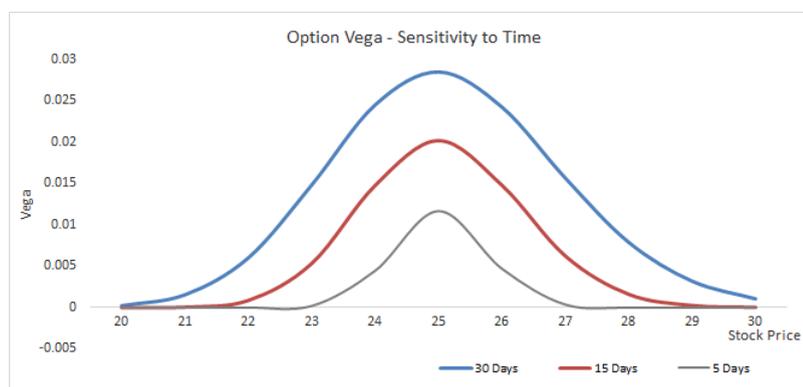
O Vega de uma opção indica o quanto o preço da opção mudará se a volatilidade do ativo for alterada em uma unidade.

O Vega mostra a variação teórica do preço da opção para cada alteração de 1 ponto percentual na volatilidade. Por exemplo, se o preço da opção for 2,5 e o Vega for 0,25, se a volatilidade passar de 0,20 para 0,21, o preço teórico aumentará para 2,75

[26].

As opções ATM são mais sensíveis a mudanças na volatilidade e, portanto, têm os valores mais altos do Vega, enquanto que opções ITM e OTM tem Vega menor.

Como a volatilidade e o tempo possuem o mesmo efeito na avaliação de opções, mais volatilidade em uma opção equivale a uma opção com mais tempo para o exercício, aumentando o valor da opção. O aumento de um desses elementos aumenta a probabilidade de a opção estar dentro do dinheiro até a data de vencimento. Isso é verificado na seguinte imagem [26].



Portanto, quando se está comprado em Vega significa que o interesse é o aumento da volatilidade. Quando a volatilidade aumenta, aumenta o valor da opção pelo valor Vega para cada movimento de 1% na volatilidade.

- **Rhô  $\rho$  (derivada na taxa livre de risco):**

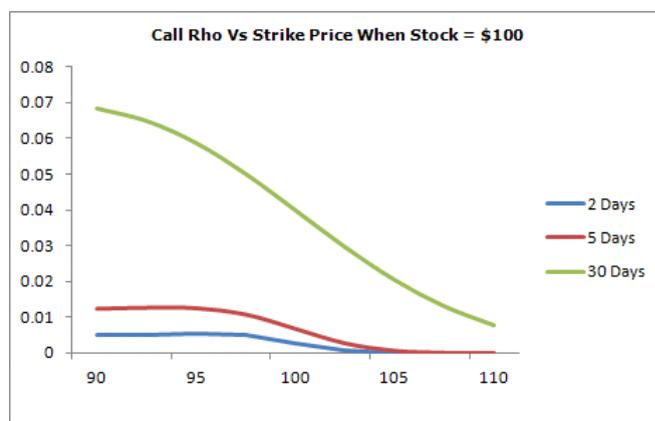
Rho é a mudança no valor da opção resultante de movimentos nas taxas de juros (Selic). O efeito que as taxas de juros têm nos contratos de opção é diferente para as opções de compra e venda.

É representada como a mudança no preço teórico da opção para um movimento de 1

ponto percentual na taxa de juros de referência. Por exemplo, uma opção de compra com um valor teórico de 2,50 está indicando um valor de Rho de 0,25. Se as taxas de juros aumentarem de 5% para 6%, então o preço da opção de compra aumentará, mantendo os demais fatores constantes, de 2,50 para 2,75 [26].

Ao contrário das outras gregas, o Rho é maior para as opções que estão no dinheiro e diminui constantemente à medida que a opção sai do dinheiro (não apresenta simetria na relação).

O Rho também aumenta com uma quantidade maior de tempo até o vencimento, ou seja, existe mais tempo para uma possível alteração na taxa de juros básica da economia.



Tanto o efeito do tempo quanto a distância que a opção passa a ser ITM ou OTM, são explicados pelo efeito que as taxas de juros têm no custo de carregamento de uma opção. As opções de ITM e as que tiverem mais tempo até o vencimento terão prêmios mais altos e, portanto, exigirão mais dinheiro para manter a opção até a data de vencimento [26].

Rho é geralmente a grega menos importante de todas. Isso ocorre porque os in-

vestidores de opções tendem a se concentrar em opções de negociação próximas do vencimento, fora do dinheiro e as reuniões de decisão de alteração da taxa de juros são de aproximadamente 45 dias (reuniões do Comitê de Política Monetária, COPOM), um prazo maior que o de negociação de uma série com grande volume no Brasil.

## 2.5 Modelo de Heston

Modelos de volatilidade estocástica abordam uma das hipóteses mais restritivas do modelo Black and Scholes (BS), ou seja, a suposição de que a volatilidade permanece constante durante a vida da opção. Observando mercados financeiros verifica-se que a volatilidade não é uma quantidade constante.

Portanto, o modelo de Heston em homenagem a Steven Heston, o ativo subjacente segue um processo de evolução que é semelhante ao modelo BSM, mas também introduz um comportamento estocástico para o processo de volatilidade. Heston faz a suposição de que a variação do ativo segue uma média revertendo ao processo Cox-Ingersoll-Ross, que é um processo que descreve a evolução das taxas de juros, é um tipo de modelo que descreve os movimentos da taxa de juros, impulsionados por apenas uma fonte de risco de mercado, também parte do processo de Wiener.

Entre os modelos de volatilidade, o modelo de Heston exhibe várias propriedades interessantes. Primeiro, modela a volatilidade como um processo de reversão à média (que é condizente com o comportamento observado nos mercados financeiros). Se a volatilidade não fosse reversível, os mercados teriam uma quantidade considerável de ativos com volatilidade explodindo ou indo perto de zero (isso é bastante raro e geralmente de curta duração). Em segundo lugar, também introduz choques correlacionados entre retorno de

ativos e volatilidade. Esta suposição permite modelar a dependência estatística entre o ativo subjacente e volatilidade, que é uma característica proeminente dos mercados financeiros, que é o cluster de volatilidade e essa relação pode ter um impacto substancial no preço dos ativos.

O modelo Heston fornece uma estrutura de modelagem versátil que pode acomodar muitas das características específicas que são tipicamente observadas no comportamento de ativos financeiros. Em particular, o parâmetro  $\zeta$  controla a curtose do ativo subjacente distribuição de retorno, enquanto  $\rho$  define sua assimetria.

O modelo de Heston é um tipo de modelo de sorriso (smile) de volatilidade. Sorriso refere-se a curva da volatilidade implícita em uma representação gráfica de várias opções com datas de vencimento idênticas que mostram uma volatilidade crescente à medida que as opções se tornam mais dentro do dinheiro ou fora do dinheiro. Esse gráfico será discutido na seção de resultados.

Para ajustar o modelo, é necessário encontrar o conjunto de parâmetros que minimize a distância entre o modelo previsões e preços de mercado observados. Em particular, usando a medida neutra ao risco, o modelo de Heston possui cinco parâmetros desconhecidos. Portanto, calibrando valores destes parâmetros, obtém-se uma evolução para o ativo subjacente que é consistente com os preços atuais das opções. Para encontrar o conjunto de parâmetros ideal, é comum usar a abordagem simples e direta de minimizar a soma média das diferenças quadradas.

Seu processo segue pelo seguinte processo estocástico.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v_t} S(t) dW_t^1$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \zeta\sqrt{v_t}dW_t^2$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

No qual  $S(t)$  é o preço do ativo e  $v$  a variação instantânea.  $W_t^1, W_t^2$  são processos de Wiener com correlação  $\rho$ , ou equivalentemente, com covariância  $\rho dt$ .

Os parâmetros nas equações acima representam o seguinte:

- $\mu$  é a taxa de retorno do ativo;
- $\theta$  é a variância média de preço de longo prazo. Quando  $t$  tende ao infinito, o valor esperado de  $v_t$  tende a  $\theta$ ;
- $\kappa$  é a taxa na qual  $v_t$  tende para  $\theta$ ;
- $\xi$  é a variância da volatilidade, determina a variância de  $v_t$
- $dW_t^1, dW_t^2$  são dois processos correlacionados de Weiner, com coeficiente de correlação  $\rho$ .

## 2.6 Heston Nandi GARCH

Heston e Nandi (2000) propõem um modelo GARCH (HN GARCH) condicionalmente normal para opções europeias. Nesse modelo, o parâmetro de volatilidade é calculado a partir do histórico do ativo subjacente sem a necessidade de usar volatilidades implícitas de opções semelhantes no mercado (como o modelo ad-hoc Black Scholes [9]). O modelo HN GARCH possui uma solução fechada, o que o diferencia de outras alternativas GARCH que exigem métodos de simulação para obter os prêmios das opções ou o uso da fórmula tradicional de Black and Scholes usando a volatilidade estimada [8].

O modelo HN GARCH possui duas suposições: A primeira é que o logarítmico do preço à vista ( $S(t)$ ) do ativo subjacente segue o processo GARCH  $(p, q)$  ao longo do tempo de duração  $\Delta$ . A segunda suposição é que o valor de uma opção de compra com um período até a expiração segue a fórmula de Black-Scholes-Rubinstein que é necessária para que  $z^*(t)$  tenha uma distribuição neutra de risco normal padrão. Para a primeira suposição, segue o modelo [14]:

$$\log(S(t)) = \log(S(t - \Delta)) + r + \lambda h(t) + \sqrt{h(t)}z(t)$$

$$h(t) = w + \sum_{i=1}^p \beta_i h(t - i\Delta) + \sum_{i=1}^q \alpha_i (z(t - i\Delta) - \gamma_i \sqrt{h(t - i\Delta)})^2$$

No qual  $r$  é a taxa de juros contínua para o intervalo de tempo  $\Delta$ ,  $z(t)$  é um ruído normal padrão e  $h(t)$  é a variância condicional do log-retorno entre o tempo  $t - \Delta$  e  $t$  que é conhecido a partir da informação definida no tempo  $t - \Delta$ . O modelo usa a variável aleatória de tempo discreto  $z(t)$  para direcionar o ativo e a variância. A variância condicional  $h(t)$  no modelo para média pode ser interpretado como um prêmio de retorno, uma vez que permite o valor de retorno médio depender do nível de risco.

A variância condicional  $h(t)$  torna-se constante nos casos específicos que os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  convergem para zero, assim o processo GARCH se reduz ao homocedástico padrão lognormal do modelo BS observado em intervalos discretos. Além disso, o termo  $\lambda h(t)$  implica que se presume que o retorno esperado exceda a taxa livre de risco por uma quantidade proporcional à variância  $h(t)$ .

No caso do GARCH(1,1) ( $p = q = 1$ ) do modelo HN GARCH pode-se observar a equação da variância condicional o termo  $\alpha_1$  determina a curtose da distribuição e  $\gamma_1$  a

assimetria da distribuição dos log-retornos. Um valor zero do parâmetro  $\alpha_1$  (volatilidade da volatilidade), implica uma variância variável no tempo determinístico. Quando  $\alpha_1$  não é zero a curtose do ativo aumenta e a distribuição de retornos possui caudas pesadas. Essa possibilidade do modelo permite que o modelo seja consistente com o fato estilizado das séries financeiras terem um excesso positivo de curtose e distribuições de cauda pesada nos retornos. Para o parâmetro  $\gamma$ , ocorre que quando assume o valor zero a distribuição é simétrica, quando assume um valor diferente de zero ocorre a assimetria de choques onde um grande valor negativo do choque  $z(t)$  aumenta a variância mais do que um grande choque positivo (atendendo a outro fato estilizado das séries financeiras).

Quando o intervalo de tempo se reduz o processo de variância  $h(t)$  converge fracamente para um processo de raiz quadrada de Cox, Ingersoll e Ross e o modelo de precificação de opções correspondente ao de Heston. Esse resultado é interessante porque o modelo consegue conciliar a abordagem GARCH em tempo discreto para o preço das opções com o abordagem de volatilidade estocástica de tempo contínuo.

Heston e Nandi propõem que sob probabilidade neutra de risco o modelo segue as seguintes equações:

$$\log(S(t)) = \log(S(t - \Delta)) + r - \frac{1}{2}h(t) + \sqrt{h(t)}z^*(t)$$

$$h(t) = w + \sum_{i=1}^p \beta_i h(t-i\Delta) + \alpha_1 (z^*(t-\Delta) - \gamma_1^* \sqrt{h(t-\Delta)})^2 + \sum_{i=2}^q \alpha_i (z(t-i\Delta) - \gamma_i \sqrt{h(t-i\Delta)})^2$$

no qual,  $z^*(t) = z(t) + (\lambda + \frac{1}{2})\sqrt{h(t)}$  e  $\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2}$ .

A partir disso e da função característica, Heston e Nandi chegaram na seguinte fórmula

de precificação de uma opção de compra:

$$C = \frac{1}{2}S(T) + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\left[\frac{K^{-if} f^*(i\phi + 1)}{i\phi}\right] d\phi - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\left[\frac{K^{-if} f^*(i\phi)}{i\phi}\right] d\phi\right)$$

no qual  $f(\phi) = E_t[S(T)^\phi]$  é a função geradora de momentos do logaritmo de  $S(T)$  e  $f^*(\phi)$  é a função geradora de momentos livre de riscos.  $K$  é o strike e  $\text{Re}$  é a parte real do número complexo.

Portanto, essa é uma enorme vantagem porque deixa o modelo independente de simulações e da fórmula de Black and Scholes para calcular a call das opções.

Além disso, para o HN GARCH(1,1) a sua variância de longo prazo é:

$$E(h(t)) = \frac{w + \alpha_1}{1 - \beta_1 - \alpha_1 \gamma^2}$$

Pela fórmula, vemos que não depende diretamente das volatilidades passadas, apenas dos parâmetros dos modelos que serão estimados. Isso deixa as estimativas para o Delta mais estáveis ao longo do tempo, se aproximando mais da convergência para o exercício (delta=1) ou não exercício (delta=0).

Para que o processo HN GARCH (1,1) seja estacionário é necessário que:

$$\beta_1 + \alpha_1 \gamma^2 \leq 1$$

Pela equação, se  $\alpha_1 = 0$ , a equação da variância segue um processo determinístico.  $\alpha_1 = 0$  e  $\beta_1 = 0$ , a variância é constante e o processo se aproxima do modelo Black Scholes tradicional em tempo discreto.

O log-retorno do ativo e a variância do HN GARCH(1,1) estão correlacionados da

seguinte forma:

$$\text{cov}_{t-\Delta}(\log(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}}), h(t)) = -2\alpha_\gamma h(t)$$

Se o valor de  $\gamma$  for positivo, então existe uma correlação negativa entre o log-retorno do ativo subjacente e a volatilidade, conforme abordado nos fatos estilizados anteriormente.

## 2.7 GARCH

O modelo de regressão por mínimos quadrados e outros modelos tradicionais pressupõem que o valor esperado de todos os retornos ao quadrado é o mesmo em qualquer ponto, esta suposição é chamada de homocedasticidade (variância constante), no entanto a presença de cluster de volatilidades em retornos de ativos financeiros mostram que a suposição de variância constante não faz sentido, assim os modelos ARCH/GARCH foram propostos para modelar a dependência temporal na variância, portanto são chamados de modelos heterocedásticos. Portanto, em dados heterocedásticos espera-se que a variância seja maior para alguns pontos ou intervalos dos dados do que para outros. Como resultado, não apenas as deficiências de mínimos quadrados são corrigidas, mas uma previsão é computada para a variância de cada retorno. O objetivo de tais modelos é fornecer uma medida de volatilidade que pode ser usada em decisões financeiras sobre risco análise, seleção de carteiras e precificação de opções.

Antes desses modelos, nenhum método considerava esse fato estilizado antes da introdução dos modelos ARCH. O principal diferencial desse modelo foi a modelagem do desvio padrão, isto é, o desvio padrão era calculado utilizando um número fixo das mais recentes observações, assume-se que a variância do retorno de amanhã é uma média igualmente ponderada dos resíduos quadrados de todo o período considerado. A utilização de pesos iguais

parece pouco atraente porque eventos mais recentes seriam mais relevantes e, portanto, deveriam ter mais pesos. Além disso, a hipótese de pesos zero para observações muito antigas também pode ser equivocada. Portanto, [11] propôs um modelo denominado como ARCH (Modelo Autorregressivo para a Heteroscedasticidade Condicional) com o objetivo de modelar a variância de uma série temporal. O modelo ARCH deixou que esses pesos fossem parâmetros a serem estimados. Assim o modelo permitiu que os dados determinassem os melhores pesos a serem usados na previsão da variância.

O modelo ARCH modela  $\sigma^2$  da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

no qual  $w > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  e  $\epsilon_i$  é o retorno.

A ideia básica é que a série dos retornos é não correlacionada serialmente, mas a volatilidade (variância condicional) depende dos retornos passados por meio de uma função quadrática. Conseqüentemente, um modelo ARCH poderá descrever uma série temporal com sequências pontuais que parecem com outliers, em que o fato de esses outliers aparecerem em clusters é causado pela equação de variância e não pelas autocorrelações no nível da série temporal, ou seja, é necessário analisar o segundo momento série (variância) e não apenas o primeiro. A primeira etapa para identificar um modelo ARCH é tentar ajustar um modelo ARMA para que a correlação serial da série seja removida, caso exista. O modelo ARCH permite que os retornos sejam não correlacionados, mas dependentes, ou seja, a covariância entre o retorno no tempo  $i$  e  $j$ ,  $i \neq j$  pode ser não nula [4].

Uma generalização do modelo ARCH foi sugerida por [2], o modelo GARCH (generalized ARCH), que possui uma componente a mais referente a variância condicional nos

instantes anteriores e pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH. Este modelo também é uma média ponderada de resíduos quadrados, mas com pesos em declínio que nunca vão completamente para zero. Pela sua extensa utilização na literatura é considerado um modelo muito bem sucedido na previsão de volatilidade. A especificação GARCH mais usada é o GARCH(1,1). Muitas vezes é utilizado de forma que tenha um comportamento adaptativo ou de aprendizagem e pode ser pensado como atualização bayesiana, a cada inovação é atualizado o modelo.

Para o modelo GARCH(p,q) é dado pela seguinte equação:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Em que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ , para que a variância de longo prazo seja finita, o parâmetro ( $w$ ) captura esse efeito e não pode ser negativo. A volatilidade é expressa em retornos que possuem pelo menos 2 períodos de diferença (lag), quando  $j = 1$  o retorno do período  $t - 2$  é usado como entrada no ultimo termo em  $\sigma_{t-1}^2$ . O método de estimação do modelo é o de máxima verossimilhança, que busca encontrar os parâmetros que maximizam a verossimilhança do modelo. O modelo mais utilizado é o GARCH(1,1) pela sua simplicidade e capacidade de capturar os efeitos da volatilidade, contudo a escolha dos valores p e q é recomendado que se ajuste diversos modelos e escolha aquele com menor AIC/BIC, uma vez que não existem instrumentos de decisão como os do modelo ARIMA.

Os pesos diminuem exponencialmente à uma taxa  $\beta$ . O parâmetro  $\beta$  pode ser interpretado como a “taxa de declínio”. Ela define a importância relativa das observações sobre os  $u_i$  para determinar a taxa de variância atual [17].

Embora este modelo esteja diretamente configurado para prever apenas um período,

Acontece que, com base na previsão de um período, uma previsão de dois períodos pode ser feita. Repetindo este procedimento, as previsões a longo prazo podem ser construídas, para o GARCH (1,1) a previsão das duas próximas observações é um pouco mais próxima da variância média de longo prazo do que a previsão de um passo e assim sucessivamente até que a previsão do horizonte distante é a mesma para todos os períodos de tempo, desde que  $\alpha_1 + \beta_1$ .

Assim como em qualquer modelo, as suposições sobre a distribuição dos erros devem ser testadas para os resíduos do modelo ajustado. Além do mais, um modelo GARCH estará bem ajustado apenas se a série de resíduos padronizados não apresentar heterodasticidade, o que geralmente é feito via análise visual dos resíduos ao quadrado, bem como pela aplicação do teste de Ljung Box nos mesmos.

Existem diversas propostas de adaptações do modelo GARCH que acrescentam algum outro termo ou fazem alguma transformação na equação do GARCH para capturar assimetrias, curtoses, entre outras coisas. Segue uma breve apresentação das variações mais utilizadas e suas vantagens.

- NGARCH(p,q): O modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada não linear é definido por:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\epsilon_{t-1}^2 - \theta \sigma_{t-1})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2$$

Seu parâmetro  $\theta$  reflete o efeito de alavanca, indicando que retornos negativos aumentam a volatilidade futura por uma quantidade maior do que retornos positivos da mesma magnitude (assimetria).

- EGARCH(p,q): O modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada exponencial, ele se diferencia do GARCH pelo log na variância, é definido por:

$$\log(\sigma_t^2) = w + \sum_{k=1}^q \beta_k g(Z_{t-k}) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \log(\sigma_{t-k}^2)$$

no qual  $g(Z_t) = \theta Z_t + \lambda(|Z_t| - E(|Z_t|))$ , sendo  $\theta$  e  $\lambda$  coeficientes e  $Z_t$  uma variável aleatória normal ou distribuição de erro generalizada (GED).

Ao contrário do modelo padrão GARCH, o modelo EGARCH com a utilização da função  $g(Z_t)$  possibilita ao modelo capturar efeitos de tamanho, assimetria e choques positivos e negativos em  $Z_t$ . Quando  $\lambda$  é negativo e considerando as outras variáveis constantes, os choques positivos geram menor volatilidade que os choques negativos.

- GJR-GARCH: o modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressivo generalizada de Glosten–Jagannathan–Runkle [10]

$$\sigma_t^2 = K + \Delta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \phi\epsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

no qual  $I$  é uma indicadora que assuma  $I_{t-1} = 0$  se  $\epsilon_{t-1} \geq 0$  e  $I_{t-1} = 1$  se  $\epsilon_{t-1} \leq 0$ . Sendo que  $\epsilon_t = \sigma_t z_t$  e  $z_t$  é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída.

O GJR-GARCH surgiu como alternativa ao método do modelo EGARCH. Como o modelo EGARCH, o GJR-GARCH também alcançou boa aplicação empírica na literatura.

A fórmula expressa o impacto de  $e_{t-i}^2$  na variância condicional  $\sigma_{t-i}^2$ . O modelo acima considera que impactos negativos ( $e_t < 0$ ) e positivos ( $e_t > 0$ ) podem ter efeitos

diferentes na variância condicional.

- TGARCH: O modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada limiar

$$\sigma_t = k + \Delta\sigma_{t-1} + \alpha^+ \epsilon_{t-1}^+ + \alpha^- \epsilon_{t-1}^-$$

no qual  $\epsilon_{t-1}^+ = \epsilon_{t-1}$  se  $\epsilon_{t-1} > 0$  e  $\epsilon_{t-1}^+ = 0$  se  $\epsilon_{t-1} \leq 0$ . E,  $\epsilon_{t-1}^- = \epsilon_{t-1}$  se  $\epsilon_{t-1} \leq 0$  e  $\epsilon_{t-1}^- = 0$  se  $\epsilon_{t-1} > 0$ . O modelo se refere ao desvio padrão condicional ao invés da variância condicional.

A distribuição de probabilidade de retornos de ativos geralmente apresenta caudas mais pesadas do que a distribuição normal padrão ou t-Student. A existência disso é provavelmente devido a um agrupamento de volatilidade, além de mudanças repentinas nos retornos das ações. Um excesso de curtose também pode ser originado por causa da cauda e, por isso, para capturar este fenômeno também será considerada distribuição GED nesse trabalho.

As distribuições de erros generalizadas (GED) são uma família simétrica de distribuições usadas geralmente quando os erros (resíduos) não são normalmente distribuídos. Casos especiais desta distribuição são idênticos à distribuição normal e à distribuição de Laplace, também é possível aproximar da uniforme. A distribuição generalizada de erros é útil quando os erros em torno da média ou das caudas são de interesse especial, o que muitas vezes é o objeto de estudo em finanças. A sua densidade é dada por:

$$\frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-\left(\frac{|x-\mu|}{\alpha}\right)^\beta}$$

No qual os três parâmetros definem a distribuição são  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  que define a curtose da distribuição. Existe uma outra versão da GED considerando um parâmetro para assimetria,

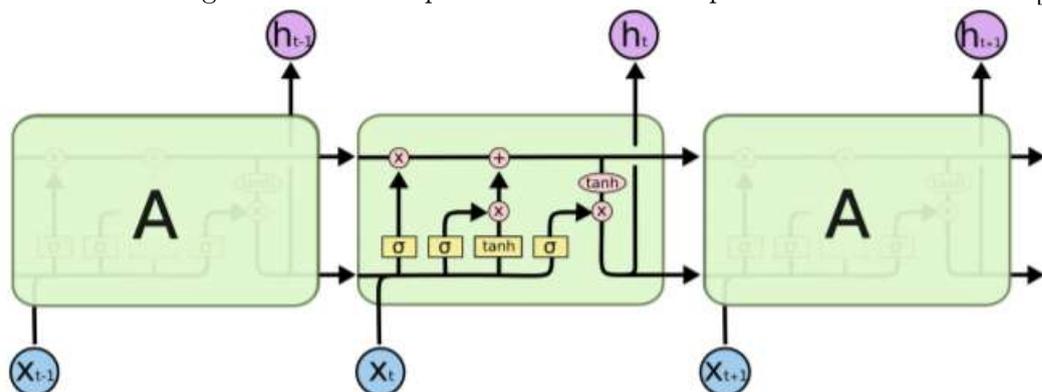
sendo chamado de versão 2 (segundo tipo).

## 2.8 Modelo de Redes de Memória de Longo Prazo (Long Short Term Memory, LSTM)

As redes de memória de longo prazo chamadas de LSTMs, do inglês Long Short Term Memory são um tipo especial de redes neurais recorrentes (RNN), capaz de aprender a longo prazo dependências. Eles foram introduzidos por [24].

Os LSTMs são projetados para evitar o problema de dependência a longo prazo que as RNN enfrentam.

Todas as redes neurais recorrentes têm a forma de uma cadeia de células (C) repetidos de rede neural. Nos RNNs padrões, essas células de repetição possuem uma estrutura muito simples, como uma única camada tanh, tangente hiperbólica (parte central da figura abaixo). Os LSTMs também têm a mesma estrutura em cadeia que pode ser considerada como o equivalente a um modelo autorregressivo de ordem p (AR(p)) porque está sendo considerado p períodos anteriores no modelo. Contudo, a célula de repetição tem uma estrutura diferente do RNN e AR(p), há quatro estruturas em cada célula interagindo para gerar resultado. A figura abaixo exemplifica a estrutura completa de uma rede LSTM [25].

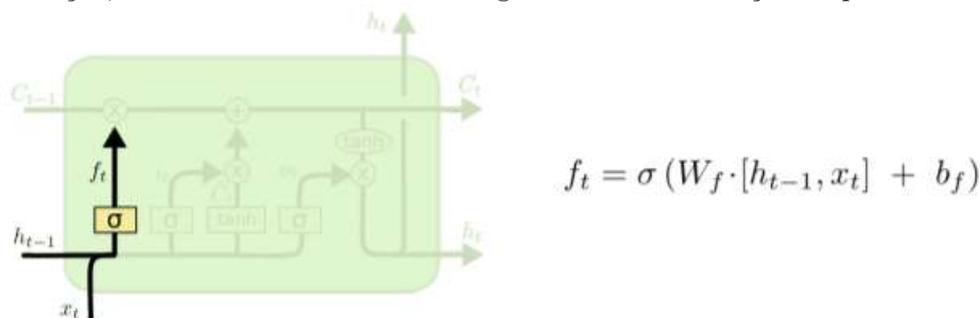


The repeating module in an LSTM contains four interacting layers.

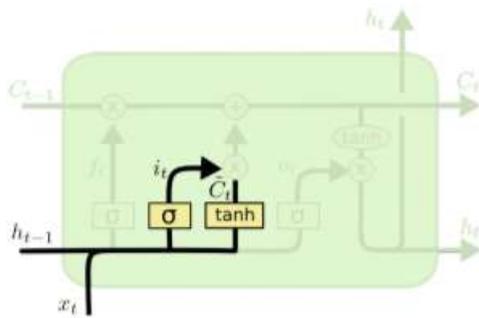
Nessa representação,  $h_t$  representa o valor de saída (o equivalente a volatilidade),  $X_t$

são as variáveis explicativas, sigma representa a função sigmoid ( $\exp(x)/(1 + \exp(x))$ ) que apenas converte um escalar real em um valor no espaço (0,1) e a função tanh é a tangente hiperbólica ( $(\exp(x) - \exp(-x))/(\exp(x) + \exp(-x))$ ) que também vai mudar o espaço dos valores para (-1, 1).

O LSTM começa avaliando quais informações não serão mantidas no estado da célula. Esta decisão é feita pela função sigmóide, essa etapa é chamada “camada do portão do esquecimento”, do inglês “forget gate layer” (representado pela função  $f_t$ ). Ou seja, é observado  $h_{t-1}$  e  $X_t$  e gera um número entre (0,1) para cada número na célula  $C_{t-1}$ , no qual 1 representa a manutenção de toda a informação anterior e 0 o esquecimento de toda a informação, nos modelos GARCH seria algo semelhante a função do parâmetro beta.



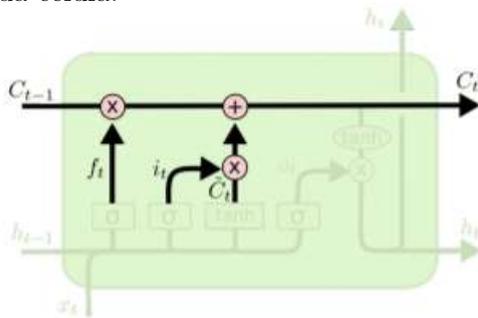
Depois do Forget gate, será avaliado quais novas informações serão armazenadas no estado da célula. Para isso, primeiramente uma camada sigmóide chamada "camada do portão de entrada", representada por  $i_t$ , define quais valores serão atualizados. Em seguida, uma camada tanh cria um vetor de novo candidato valores,  $\tilde{C}_t$ , que podem ser adicionados ao estado.



$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

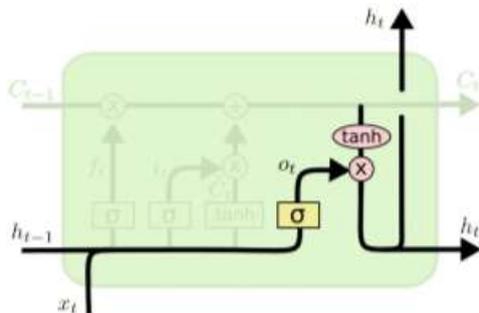
$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C)$$

Para atualizar o antigo estado da célula ( $C_{t-1}$ ) para o novo estado da célula ( $C_t$ ), multiplicamos o estado antigo pelo resultado do Forget gate e adicionamos o produto entre  $i_t$  e  $\tilde{C}_t$ . Este é o novo valor da célula do modelo, considerando o quanto foi decidido atualizar a cada célula.



$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t$$

Para finalizar, o valor predito será baseado no estado da célula por meio de mais um filtro. Novamente, uma nova camada ( $o_t$ ) sigmóide que decide quais partes do estado da célula vamos manter para o resultado. Então, é inserido o valor da célula  $C_t$  no filtro tanh e esse valor que já está padronizado (-1 a 1) é multiplicado pelo resultado do filtro sigmoide ( $o_t$ ). Dessa forma, é obtido o valor final de  $h_t$ .



$$o_t = \sigma(W_o [h_{t-1}, x_t] + b_o)$$

$$h_t = o_t * \tanh(C_t)$$

Portanto, todas as variáveis são calculadas diretamente e o único fator que vai ser

estimado iterativamente são os pesos  $W$ . Existem várias formas de estimar o peso como RMSprop e SGD com momento, contudo o estimador mais utilizado e que será utilizado é o estimador Adam.

Adam é um método de taxa de aprendizado adaptável, ou seja, calcula taxas de aprendizado individuais para diferentes parâmetros. Seu nome é derivado da estimativa do momento adaptativo, e a razão pela qual é chamado é que Adam usa estimativas do primeiro e do segundo momentos do gradiente para adaptar a taxa de aprendizado para cada peso da rede neural.

Ele usa os gradientes quadrados para escalar a taxa de aprendizado como RMSprop e aproveita o momento usando a média móvel do gradiente em vez do próprio gradiente como SGD com momento. Portanto, é uma combinação de dois outros estimadores.

### **2.8.1 Otimização Bayesiana (Bayesian Optimization)**

Nos algoritmos de machine learning que possuem muitos hiperparâmetros para serem ajustados, usualmente são buscados por meio de algoritmos como pesquisa em grade (grid search) e pesquisa aleatória (random search), contudo são algoritmos que levam a exaustão do tempo e não levam em consideração os resultados já encontrados como insumo para a próxima iteração. As abordagens bayesianas, contudo, mantêm o registro dos resultados de avaliações anteriores, formando um modelo probabilístico de mapeamento dos hiperparâmetros para ter uma probabilidade maior de maximizar/minimizar a função objetivo com menos interações.

Na literatura, esse modelo é chamado de "substituto" para a função objetivo e é representado como  $P(y|x)$ . O substituto é muito mais fácil de otimizar do que a função objetivo

e os métodos bayesianos funcionam encontrando o próximo conjunto de hiperparâmetros para avaliar a função objetivo real, selecionando os hiperparâmetros que apresentam melhor desempenho na função substituta, ou seja  $P(score|hiperparmetros)$ .

As seguintes etapas mostram o processo de otimização do hiperparâmetro:

- Especificar um domínio dos hiperparâmetros nos quais pesquisar;
- Uma função objetivo com hiperparâmetros e que gera um escore que deve ser minimizado ou maximizado;
- O modelo substituto da função objetivo;
- O critério de seleção, chamado função de seleção, para avaliar quais hiperparâmetros escolher a cada iteração seguir no modelo substituto;
- Armazenamento do histórico (escore e hiperparâmetros) usados pelo algoritmo para atualizar o modelo substituto.

Existem várias possibilidades de funções no terceiro e quarto item. Várias opções comuns para o modelo substituto são Processos Gaussianos, Regressões Aleatórias Florestais e Estimadores de Árvore Parzen (TPE), enquanto que os critérios de seleção são usualmente Melhoria Esperada (Expected Improvement), conhecimento do gradiente (Knowledge Gradient) e busca de entropia (Entropy Search). Nas subseções a seguir são apresentados os métodos Processos Gaussianos e o método de Melhoria Esperada, os quais serão utilizados nos testes envolvendo LSTM.

## Processos Gaussianos

O Processo Gaussiano (PG) [19] é um conjunto conveniente e poderoso de distribuição de funções, que tomaremos aqui para ter a forma  $f : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ . O PG é definido pela propriedade que qualquer conjunto finito de  $N$  pontos  $(x_n \in \chi)_{n=1}^N$  induz uma distribuição multivariado gaussiana em  $\mathbb{R}^N$ . O  $n$ -ésimo desses pontos é considerado o valor da função  $f(x_n)$ , e as propriedades de marginalização da distribuição gaussiana permitem calcular as marginais e condicionais de forma fechada. O suporte e as propriedades da distribuição resultante nas funções são determinados por uma função média  $m : \chi \rightarrow \mathbb{R}$  e um definitivo positivo função de covariância  $K : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Melhoria Esperada (Expected Improvement)

A melhoria esperada [19], será a partir da busca de novos valores no espaço paramétrico levando em consideração o valores já avaliados.

Assumimos que a função  $f(x)$  é gerada de um processo gaussiano a priori e conforme ocorre as iterações, os dados anteriores induzem a funções posteriores. A função de aquisição (EI) determina qual ponto em  $\chi$  deve ser avaliado a seguir via otimização  $x_{proximo} = \operatorname{argmin}_x EI(x)$ . Em geral, essas funções de aquisição dependem das observações anteriores, bem como os hiperparâmetros PG.

Pode-se optar por maximizar a melhoria esperada (EI) em relação ao atual valor atingido, isso possui fórmula fechada para o caso considerando o processo gaussiano:

$$EI(x; x_n, y_n, \theta) = \sigma(x; x_n, y_n, \theta)(\gamma(x)\Phi(\gamma(x)) + N(\gamma(x); 0, 1))$$

Sob o processo gaussiano, essas funções dependem do modelo apenas através de sua

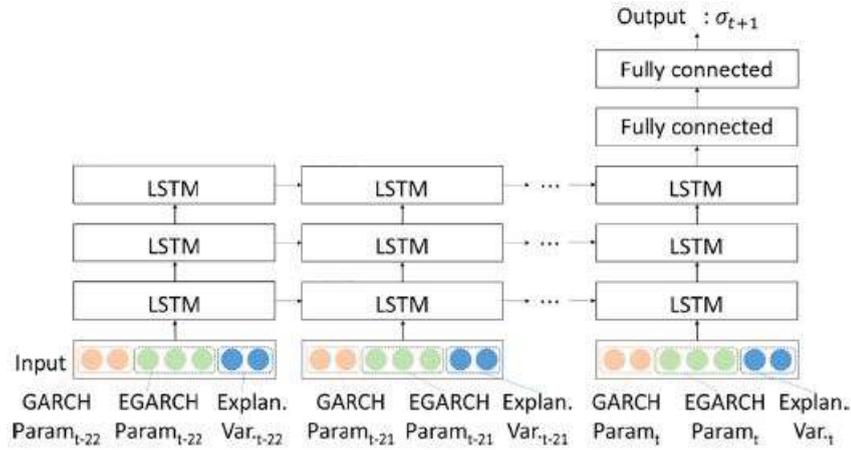


Figura 2.4: Estrutura rede LSTM [12].

função média  $\mu(x; x_n, y_n, \theta)$  e função de variação  $\sigma^2(x; x_n, y_n, \theta)$ . No processo, será indicado o melhor valor como  $x_{melhor} = \operatorname{argmin}_{x_n} f(x_n)$  e  $\Phi$  denota a função de distribuição cumulativa do normal padrão. A função  $\gamma$  é dada por:

$$\gamma(x) = \frac{f(x_{melhor}) - \mu(x; x_n, y_n, \theta)}{\sigma(x; x_n, y_n, \theta)}$$

## 2.8.2 Aplicação LSTM

Com o objetivo de comparar os resultados com o artigo de [12] tentou-se reproduzir a mesma estrutura da rede utilizada, conforme a Figura 2.4.

Essa rede possui 3 camadas de LSTM com 22 períodos de defasagem ("timesteps") e duas camadas totalmente conectadas. As variáveis explicativas no artigo de referência foram as volatilidades previstas pelos modelos GARCH e variáveis macroeconômicas e a variável resposta foi a variância dos 60 dias anteriores da ação.

Contudo, a rede utilizada nesse trabalho teve algumas pequenas alterações. Foi utilizado 2 camadas LSTM com 22 períodos de defasagem e 2 camadas totalmente conectadas, as variáveis explicativas foram as volatilidades previstas do GARCH (T e GED), EGARCH (T e GED) e HNGARCH e a variável resposta também foi a variância dos 60 dias anteriores

da ação.

Os parâmetros ajustados na rede foram 4 e 4 neurônios em cada camada de LSTM, respectivamente e 1 neurônio na totalmente conectada. O efeito de dropout para evitar sobreajuste também foi incluído (conforme o artigo faz) e foi de 5,6%, 8% e o parâmetro de aprendizado (learning rate) foi de 0,0001.

Como a variável resposta do LSTM será a volatilidade prevista diária e o objetivo é analisar a probabilidade de exercício, bem como o valor da opção da call, e não existe uma fórmula fechada para rede neural para fazer essa ligação, dessa forma foi utilizado a fórmula de Black and Scholes considerando a volatilidade obtida pelo LSTM para calcular os Deltas e os preços das opções tipo Call.

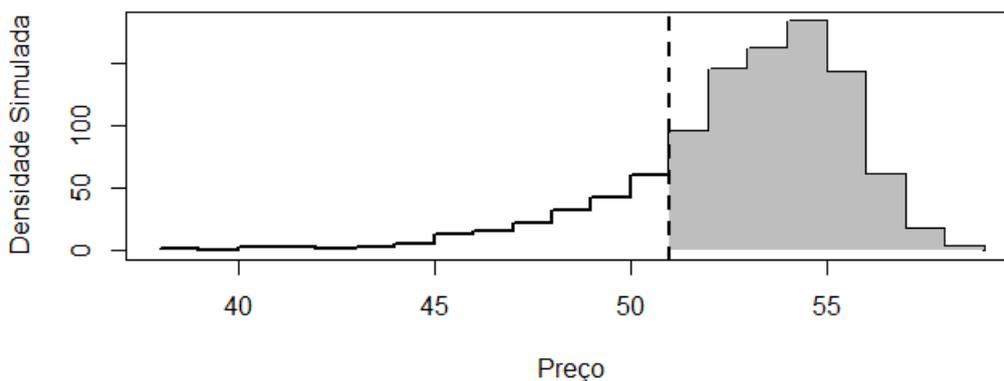
## **2.9 Monte Carlo**

Em finanças, um modelo de opção de Monte Carlo usa métodos de Monte Carlo para calcular o valor de uma opção com múltiplas fontes de incerteza ou com características complicadas. As técnicas de Monte Carlo são úteis em diversas áreas porque permite simular diversos cenários de tal forma que se possa ter de forma fácil um intervalo de confiança e uma estimativa dos cenários de determinado evento de interesse.

O primeiro passo realizado no uso de métodos Monte Carlo foi gerar 1.000 simulações dos erros e depois retransformar em retornos diários corrigidos pela taxa livre de risco. Para essa simulação é selecionado um modelo e se acompanha a evolução do ativo subjacente e, em seguida, calcula-se as métricas desejadas com toda a distribuição gerada.

Como serão avaliadas as probabilidades de exercício e o valor de compra de uma opção, o método de monte carlo será usado para auxiliar as estimativas geradas a partir dos modelos

**Figura 2.5:** Distribuição do preço para ação simulada com forma e assimetria do GARCH.



GARCH e EGARCH, ou seja, além de usar a volatilidade estimada nesses modelos na fórmula de Black and Scholes para encontrar o Delta e o preço da Call (procedimento usual), também será calculado com base na distribuição dos erros o lucro esperado corrigido pela taxa livre de risco e a probabilidade de exercício que é exatamente a frequência de preços simulados acima do valor de exercício sobre a frequência total. A Figura 2.5 exemplifica esse processo.

A curva na Figura 2.5 é de uma densidade simulada considerando a distribuição GED usando os parâmetros de forma e assimetria iguais aos valores estimados para determinado dia via GARCH. Portanto, considerando um strike na linha tracejada, a probabilidade de exercício será a área sombreada sobre a área total. Esse processo é repetido para todas as opções para todos os strikes.

Quanto mais valores são gerados, mais tempo computacional a simulação leva para ser executada. Existem adaptações para reduzir o viés e variância do Monte Carlo para precificação de opções. Abaixo segue a estrutura padrão de Monte Carlo:

- Determinação do modelo gerador;
- Escolha da variável aleatória;
- Loop do modelo para cada simulação e período (T), definir a quantidade de Simulações (N=1.000);
- Aplicação dos preços do ativo na simulação em cada período de tempo;
- Analisar os resultados das simulações na data de expiração.

Os métodos de Monte Carlo diferenciam-se de outras técnicas de precificação de opções na forma como os preços dos ativos futuros são gerados. A técnica pode ser aplicada a qualquer ativo que siga qualquer processo estocástico ou qualquer problema que existe uma distribuição aleatória associada na qual as amostras podem ser obtidas e simuladas. Dessa forma, no caso dos modelos GARCH que exigem a definição de uma distribuição não existem problemas, mas modelos de redes neurais (como o LSTM) que não possuem uma distribuição bem definida, faz-se necessidade de uso de uma distribuição empírica ou da escolha forçada do modelo.

## 2.10 Volatilidade Implícita e Superfície

A volatilidade implícita (VI) é uma métrica que captura a visão do mercado da probabilidade de alterações no preço de um determinado ativo. Volatilidade implícita não é volatilidade histórica (volatilidade realizada). O valor histórico da volatilidade medirá as mudanças passadas do mercado e seus resultados reais com base na variância estatística considerando todas as observações independentes.

A volatilidade implícita ajuda a quantificar o sentimento do mercado. Ele estima o tamanho do movimento que um ativo pode realizar. Muitos investidores analisam a volatilidade implícita quando escolhem um investimento. Durante períodos de alta volatilidade, eles podem optar por investir em setores ou produtos mais seguros.

A volatilidade implícita é tão importante e utilizada que existe um índice nos Estados Unidos chamado VIX (volatility index), que é uma medida popular da expectativa de volatilidade do mercado de ações implícita nas opções do índice *S&P500*. Ele é calculado e disseminado em tempo real pela Bolsa de Opções de Chicago (CBOE) e é geralmente chamado de índice de medo. Existem opções a partir desse índice e alguns investidores e fundos o utilizam para se beneficiar de períodos de volatilidade alta ou baixa, conforme as suas expectativas.

A volatilidade implícita não é observada diretamente, como o próprio nome sugere. Usualmente é calculada a partir dos valores praticados nas calls/puts e por meio da inversão da fórmula de Black and Scholes (BS) é gerado a volatilidade implícita. Contudo, não é possível isolar analiticamente a variável volatilidade no modelo BS. O parâmetro de volatilidade não pode ser isolado nas fórmulas de precificação de Black e Scholes diretamente, portanto é necessário calcular por meio de métodos numéricos como Newton Raphson ou outros.

A Tabela 2.1 apresenta um exemplo em que nas linhas são listadas 8 diferentes opções do tipo Call e nas colunas são apresentadas as variáveis Call (valor da opção),  $S$  (valor do ativo),  $K$  (valor do strike),  $r$  (valor da taxa da taxa livre de risco),  $t$  (tempo em dias para maturidade) e VI (Volatilidade Implícita). Para cada linha, a partir da inversão numérica da equação do modelo BS, são obtidas as respectivas volatilidade implícitas de cada opção.

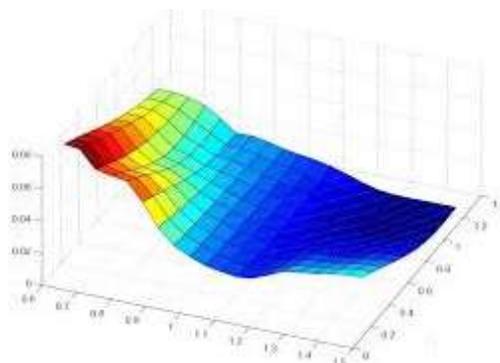
**Tabela 2.1:** Tabela cálculo volatilidade implícita.

Número	Call	S	K	r	t	VI
1	0,30	25	28	0,05	20	0,51
2	0,30	25	28	0,15	20	0,49
3	0,30	25	28	0,05	30	0,41
4	0,10	25	28	0,05	30	0,35
5	3,32	28	25	0,05	20	0,49
6	0,64	25	28	0,05	20	0,70
7	0,90	25	25	0,05	20	0,37
8	2,50	25	23	0,05	20	0,53

Pela tabela 2.1 percebemos que ao variar apenas um parâmetro, a VI já tem alterações relevantes. Outro fato que chama a atenção é que entre as linhas 5 a 8 temos alterações de forma que o Strike seja maior, menor e igual ao preço do ativo, fazendo que sua volatilidade varie entre 0,70 e 0,37, ou seja, apenas alterando o nível da exercício da opção temos volatilidades diferentes para o mesmo ativo nas mesmas condições, o nome desse fenômeno é superfície de volatilidade.

### 2.10.1 Superfície de Volatilidade

A superfície de volatilidade é uma superfície na qual apresenta para o mesmo ativo objeto a volatilidade implícita calculada pelo tempo até o exercício e o moneyness (representando as opções ITM, ATM e OTM). A seguinte imagem ilustra o conceito.



Pela imagem, verificamos que ao longo do moneyness (eixo horizontal frontal), fixando

o tempo (eixo horizontal lateral), existem diferentes VIs. Isso mostra o que já foi visto na Tabela 2.1, para um mesmo prazo de uma mesma série histórica de um ativo, existem várias volatilidades distintas estimadas.

Ainda que a volatilidade do ativo subjacente seja apenas uma, alguns trabalhos da literatura ([5]) focam no estudo dessa superfície como forma de correção dos modelos de precificação para opções que estão muito ITM ou muito OTM.

### 2.10.2 Equações de Volatilidade

É verdade que se admitirmos que um modelo de precificação é verdadeiro, digamos o Black and Scholes, então a partir de um conjunto de opções que estão sendo negociadas em bolsa, sempre podemos obter a superfície de volatilidade e a partir desta, utilizarmos o mesmo modelo para calcular a probabilidade de exercício, preço justo e as gregas. No entanto, algumas inconsistências podem ser identificadas nesse processo. Listamos duas a seguir,

- Se a última negociação de uma opção ocorreu a algum tempo, o valor atual da volatilidade implícita pode ficar deturpado do que seria o valor justo atual;
- Opções que estão muito fora do dinheiro possui valor extrínseco teórico próximo de zero, de modo que uma negociação com valor extrínseco de poucos centavos gera volatilidades implícitas muito maiores que a volatilidade real do ativo subjacente.

No que segue propomos 3 equações para tentar estimar a volatilidade do ativo subjacente a partir das volatilidade implícitas de seus derivativos.

A primeira equação é a Média ponderada pelo volume de todas as volatilidades implí-

citadas obtidas de cada opção, sua fórmula é:

$$Eq.1 : \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{it} \times Volume_{it}}{\sum_{i=1}^N Volume_{it}}$$

No qual  $N$  é o número de opções monitoradas para o mesmo ativo subjacente e  $i$  indica cada opção, ou seja, é a soma do produto da volatilidade com o volume negociado para todas as opções em determinado dia  $t$  dividido pela volume total negociado da série da opção no mesmo dia.

A segunda equação é a volatilidade implícita da opção com strike ( $K$ ) mais próximo do valor de mercado. Ou seja, é apenas a volatilidade da opção no dinheiro.

$$Eq.2 : \sigma_{min((S-K)/K)}$$

A terceira equação é um caso particular da primeira, é considerado a volatilidade implícita das opções que satisfazem  $\frac{|S-K|}{S} \leq 0.05$ . Se mais de uma opção satisfizer, então utilizar a equação 1.

$$Eq.3 : \frac{\sum_{i=1: \frac{|S-K|}{S} \leq 0.05}^N \sigma_{it} \times Volume_{it}}{\sum_{i=1: \frac{|S-K|}{S} \leq 0.05}^N Volume_{it}}$$

Dessa forma, temos uma volatilidade diária calculada de acordo com 3 equações. Além das equações, será considerada a volatilidade dos modelos GARCH (com distribuição GED e T), EGARCH (com distribuição GED e T), HNGARCH e LSTM descritos nas seções anteriores.

Com base em cada volatilidade, foi calculado o valor da Call e do Delta (probabilidade de exercício). Para as equações 1 a 3, GARCH e EGARCH foi considerado a fórmula de Black and Scholes para inverter o valor da volatilidade e encontrar o valor do preço da

opção de compra e também para a grega delta. Esse procedimento foi adotado porque não existe fórmula analítica alternativa para o modelo GARCH/EGARCH (uma vez que o foco desses modelos é apenas modelar a volatilidade) para substituir totalmente o Black and Scholes e calcular conforme seu próprio modelo o delta.

Contudo, para o modelo HNGARCH existe uma fórmula alternativa própria para calcular tanto o preço de compra da opção quanto o valor do delta. O HNGARCH calcula o valor da opção de compra sem a necessidade de inserir no modelo a volatilidade em si, apenas os demais parâmetros do modelo, ele considera uma volatilidade de longo prazo apenas como uma função dos parâmetros estimados e a partir dela calcula o valor de interesse.

## Capítulo 3

# Análise e Resultados

Neste capítulo são introduzidas as métricas de avaliação, filtros e são realizados alguns estudos empíricos para a precisão do cálculo da probabilidade de exercício e da precificação de opções para alguns dos modelos que foram discutidos nos capítulos anteriores. Para este estudo, consideramos um conjunto de dados formado pelos históricos do preços das ações das empresas Petrobras e Vale, bem como pelos históricos de alguns dos seus respectivos derivativos. Ao todo são considerados 14 combinações de modelos, os quais estão listados abaixo:

- BS: Black and Scholes com volatilidade implícita;
- EQ1: Black and Scholes com volatilidade calculada pela equação 1;
- EQ2: Black and Scholes com volatilidade calculada pela equação 2;
- EQ3: Black and Scholes com volatilidade calculada pela equação 3;
- GARCH T BS: Black and Scholes com volatilidade calculada pelo modelo GARCH com erros T;
- GARCH GED BS: Black and Scholes com volatilidade calculada pelo modelo GARCH com erros GED;
- EGARCH T BS: Black and Scholes com volatilidade calculada pelo modelo EGARCH com erros T;
- EGARCH GED BS: Black and Scholes com volatilidade calculada pelo modelo EGARCH com erros GED;
- GARCH T sim: simulação de Monte Carlo via o modelo GARCH com erros T

- GARCH GED sim: simulação de Monte Carlo via o modelo GARCH com erros GED;
- EGARCH T sim: simulação de Monte Carlo via o modelo EGARCH com erros T;
- EGARCH GED sim: simulação de Monte Carlo via o modelo EGARCH com erros GED;
- HNGARCH: HNGARCH(1,1);
- LSTM: LSTM conforme configuração da subseção 2.8.2.

Todos os resultados foram gerados considerando alguns cenários distintos que serão explicados na próxima seção.

Dessa forma, além dos modelos cobrirem os fatos estilizados de finanças, serão avaliados em cada cenário distinto em todas as variáveis relevantes no mercado de opções: tempo para o vencimento, moneyness e volatilidade.

## 3.1 Métricas e Filtros

### 3.1.1 Delta

Para comparação das volatilidades estimadas conforme cada modelo, vai ser utilizada uma métrica que tenta comparar o quão distante está a probabilidade estimada está do resultado final de cada opção, que pode ser o exercício (probabilidade deveria ser 1) ou o não exercício (probabilidade deveria ser 0). O seguinte raciocínio ilustra a métrica:

- Se valor do Strike for menor ou igual que o valor do ativo no exercício  $T$  ( $S \leq X_T$ ) então a probabilidade de exercício vai permanecer a mesma: *Delta*;
- Se valor do Strike for maior que o valor do ativo no exercício  $T$  ( $S \geq X_T$ ) então a probabilidade de exercício vai ser o complementar do estimado:  $1 - \text{Delta}$ .

Como o valor de Delta sempre pertence ao intervalo  $[0, 1]$ , podemos considerar que quando ocorre o exercício o delta assume o próprio valor, quando não é exercido ele assume

o valor  $1 - \text{Delta}$  porque como é esperado valores de delta baixo quando é o caso de não exercício, é necessário usar o complementar para ser comparável com o caso de quando ocorre o exercício. Em suma, essa métrica tem o objetivo de indicar a precisão do cálculo delta e quanto mais próximo de 1 melhor, indica que o modelo estava mais próximo do real valor (que pode ser apenas 0 ou 1 no vencimento).

Essa métrica foi utilizada ao invés das tradicionais (MSE, MAE, ...) porque como a volatilidade é não observável e o delta é calculado a partir dela, não existe um valor observado para se comparar as estimativas e o realizado. Alguns artigos [12] utilizam a variância tradicional (considerando observações independentes) para comparação, mas essa metodologia vai de encontro com a ideia desse trabalho que é considerar a volatilidade como uma variável latente, não observável.

Além da métrica, foi gerado uma tabela que indica a proporção de opções que tiveram o delta mais próximo de 1 (das opções que foram exercidas) ou mais próximo de 0 (das opções que não foram exercidas) comparando sempre o delta de algum modelo com o delta do Black and Scholes.

Portanto, pela métrica será verificado a magnitude da diferença das probabilidades de exercício estimadas e pela tabela a proporção da quantidade total de opções que tiveram melhor estimativa conforme cada modelo.

### **3.1.2 Call**

Para comparar o valor da opção de compra estimado por cada método, serão utilizados 4 métricas para comparar o valor estimado do modelo e o valor praticado no mercado. Uma das medidas de erro mais comuns estão o erro quadrático médio (MSE), a raiz quadrada

do erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio (MAE) e o erro absoluto médio percentual (MAPE). Todas essas medidas serão mais próximas de zero conforme o valor predito for mais próximo do valor verdadeiro. Segue abaixo as equações para cada uma das quatro métricas de acurácia consideradas.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (C_t - \hat{C}_t)^2$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (C_t - \hat{C}_t)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |C_t - \hat{C}_t|$$

$$MAPE = \frac{100}{n} \frac{\sum_{t=1}^n |C_t - \hat{C}_t|}{|C_t|}$$

no qual  $C_t$  é o valor da Call praticado no mercado de opções no tempo  $t$ ,  $\hat{C}_t$  é o valor da Call predito do modelo e  $n$  é o número de observações disponíveis.

### 3.1.3 Filtros

Para comparação das volatilidades estimadas dos modelos para o cálculo da probabilidade de exercício e para o valor da Call, foram criados 4 filtros (8 cenários no total) para verificar o desempenho de cada modelo em cada um. Todos os filtros foram elaborados conforme características típicas do mercado. Seguem os filtros:

- Sem filtro: Utiliza-se todas as opções (1 cenário);
- Filtro Temporal: Utiliza-se apenas as opções que estão com mais ou menos 15 dias para o vencimento (2 cenários);
- Filtro Moneyness: Utiliza-se apenas as opções que estão ITM, ATM ou OTM (3

cenários);

- Filtro Volatilidade: Utiliza-se apenas as opções que possuem volatilidade acima ou abaixo de 0,35 (2 cenários).

Foi considerado o valor de volatilidade de 0,35 para dividir em dois grupos porque é o valor da mediana estimada pelo modelo GARCH T. Os 3 grupos criados pelo moneyness são diretamente criados pela própria construção do moneyness. Os 2 grupos criados pelo filtro temporal considerando 15 dias para o vencimento é de tal forma que não esteja com pouco tempo para o exercício e a maioria dos modelos convirjam para a mesma estimativa.

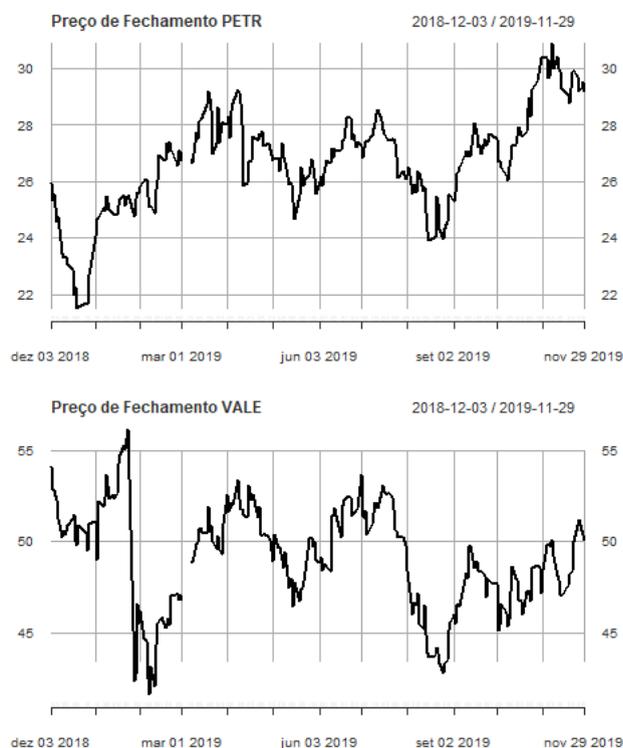
## 3.2 Dados

Os dados foram provenientes de duas fontes, os dados das ações da PETR4 da empresa Petrobras e VALE3 da empresa Vale são de 01/01/2010 à 30/11/2019 e foram obtidos pelo site Yahoo Finance por meio de relação direta criada por pacotes do R e o site. Os dados das opções das duas empresas foram obtidos por expressões regulares do site oficial da B3 ([http://www.b3.com.br/pt\\_br/](http://www.b3.com.br/pt_br/)) que armazenava as opções que tiveram pelo menos 100 contratos de negociação e que foram negociadas para os vencimentos de dezembro de 2018 à novembro de 2019, constituindo 12 vencimentos no total.

Para os modelos GARCH e LSTM o estudo foi realizado utilizando um processo de janela deslizante de tamanho 500 dias, de modo que, para o cálculo da previsão de volatilidade em cada dia, foi considerado os 500 dias anteriores para ajustar os modelos.

A Figura 3.1 mostra a evolução dos preços de fechamento de dezembro de 2018 a novembro de 2019 da Petrobras e da Vale.

**Figura 3.1:** *Evolução dos preços de fechamento da Petrobras e da Vale.*



As Tabelas 3.1 e 3.2 a seguir mostram para cada empresa as medidas descritivas e o intervalo de confiança para a média do valor de fechamento das ações na data das opções que foram consideradas, o volume negociado, os dias para o vencimento e o delta calculado via Black and Scholes.

Pelas Tabelas 3.1 e 3.2, é observado um volume de negociações muito maior para a Petrobras, com quase o dobro de opções que satisfizeram os filtros para entrar na análise. Além disso as opções da Vale negociam com menos tempo para o vencimento do que da Petrobras, em média. Com relação a distribuição do Delta de cada empresa, a média e mediana da vale são inferiores a da Petrobras e possui um pouco mais de assimetria, enquanto que a Petrobras possui uma distribuição mais platicúrtica.

**Tabela 3.1:** *Análise descritiva Petrobras.*

Medidas	Fechamento	Volume	Dias até vencimento	Delta
N obs.	6588	6588	6588	6588
NAs	0	0	0	0
Mínimo	21.17	100	1	0
Máximo	31.11	25223	47	1
1 Quartil	25.64	198	9	0.18
3 Quartil	27.63	1112	24	0.65
Média	26.65	938	17	0.43
Mediana	26.74	435	17	0.41
Lim. Inf Média	26.61	906	17	0.42
Lim. Sup. Média	26.69	970	17	0.44
Variância	2.55	1744969	94	0.08
Desvio Padrão	1.6	1321	10	0.28
Assimetria	-0.21	4	0	0.29
Kurtose	0.98	31	-1	-1.04

**Tabela 3.2:** *Análise descritiva Vale.*

Medidas	Fechamento	Volume	Dias até vencimento	Delta
Nº obs.	3488	3488	3488	3488
NAs	0	0	0	0
Mínimo	41.4	100	1	0
Máximo	57.92	6187	46	1
1 Quartil	46.85	164	7	0.19
3 Quartil	51.43	585	19	0.51
Média	49	498	13	0.37
Mediana	49.42	294	13	0.35
Lim. Inf Média	48.9	479	13	0.36
Lim. Sup. Média	49.1	518	14	0.38
Variância	9.56	346175	57	0.05
Desvio Padrão	3.09	588	8	0.23
Assimetria	-0.23	4	0	0.57
Kurtose	-0.55	18	0	-0.19

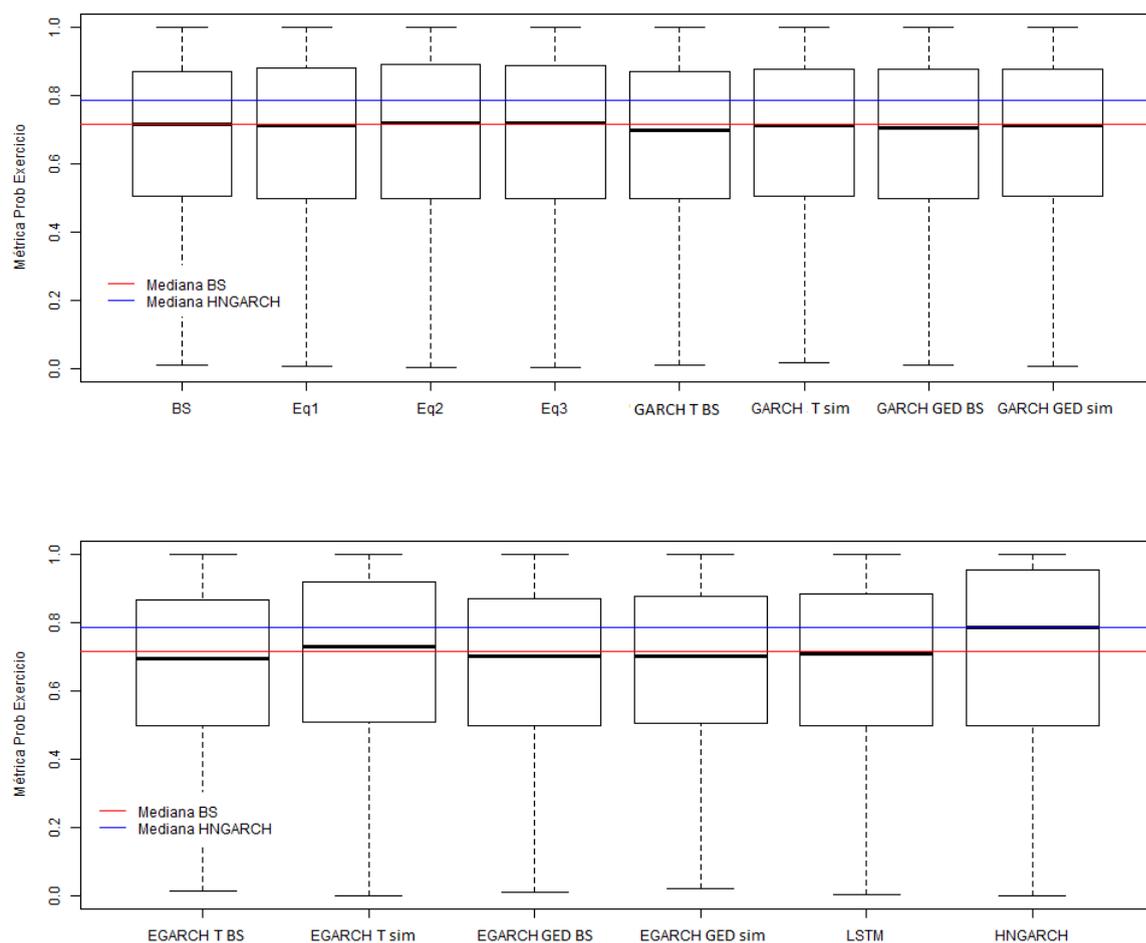
### 3.3 Probabilidade de Exercício (Delta)

Como já mencionado, não existe um valor explicitamente praticado pelo mercado da probabilidade de exercício, por isso a comparação dos resultados dos modelos sempre serão em relação ao Black and Scholes, por ser muito conhecido e utilizado.

A primeira forma para avaliação será conforme descrita na métrica para o Delta na seção 3.1.1. Considerando essa métrica, valores mais próximos de 1 são os mais desejados (1 significando acerto total e 0 erro total). Foram gerados boxplots de todos os modelos para essa métrica e traçados linhas para marcar a mediana do modelo Black and Scholes e do modelo com a maior mediana (HNGARCH) para facilitar a comparação. As Figuras 3.2 e 3.3 mostram os resultados para cada empresa e como são muitos modelos foram divididos em duas linhas os boxplots, repetindo o boxplot do BS e HNGARCH para melhor comparação.

Tanto para a Petrobras quanto para a Vale os modelos que tiveram valores de mediana e 3º quartil mais elevados foram o EGARCH T sim e, principalmente, o HNGARCH. Além disso, o resultado das 3 equações ficaram bem semelhantes ao do Black and Scholes em toda a distribuição. A posição do corpo do boxplot como um todo do modelo EGARCH T BS foi ligeiramente inferior ao do BS, enquanto que esse mesmo modelo com os resultados gerados via simulação de monte carlo tiveram resultados bem melhores. Isso indica como pode ser um equívoco utilizar a inversão da equação de Black and Scholes para modelos que não possuem uma fórmula fechada. Além disso, o modelo LSTM também possui um comportamento muito semelhante ao do BS, tanto os quartis quanto os limites. Por ser um modelo que se aproxima do BS por aproximar a variância histórica e utilizar as equações

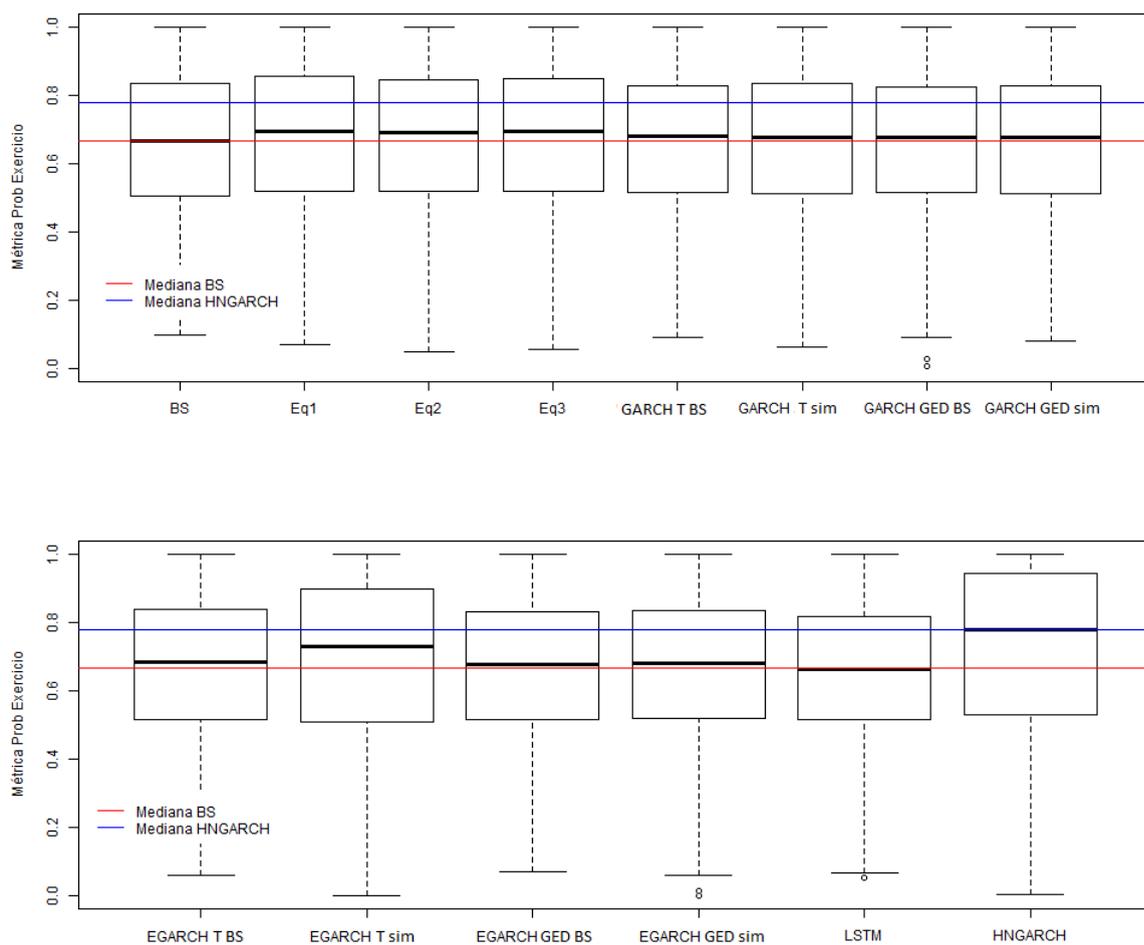
**Figura 3.2:** Comparação Petr. modelos métrica probabilidade exercício.



do BS para cálculo do delta e da call, o resultado está de acordo com o esperado.

Além da métrica mencionada, foi gerado um gráfico de dispersão do Delta para avaliar em quais lugares do espaço paramétrico diferem-se os valores estimados e onde se concentram mais os resultados, como mostra a Figura 3.4. Pela figura, no eixo horizontal está o delta estimado pelo BS e no vertical a estimação do modelo concorrente, nesse exemplo o HNGARCH. A linha diagonal ( $x = y$ ) que cruza a imagem representa a situação de que as duas estimativas foram iguais, sendo próximas de 1 ou 0. Os pontos verdes representam as

**Figura 3.3:** Comparação Vale. modelos métrica probabilidade exercício.



opções que foram exercidas e os vermelhos as que não foram exercidas.

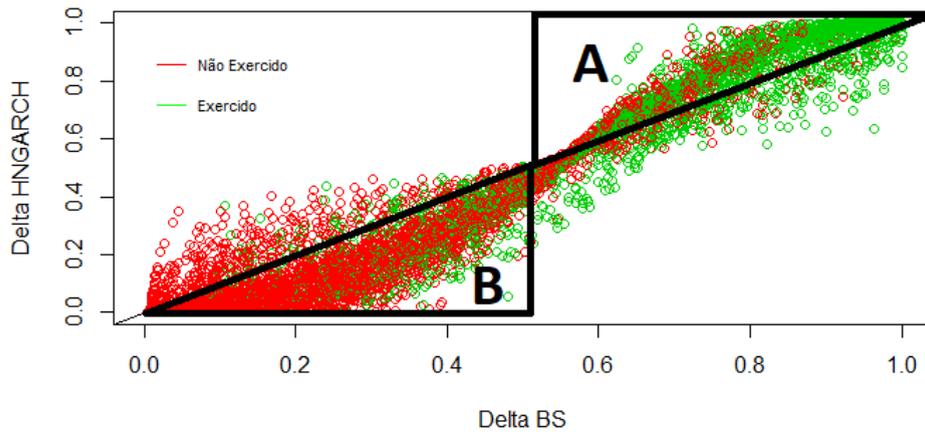
Considerando a parte direita do gráfico, onde o delta BS é superior a 0,5, temos a região delimitada pelo triângulo A indica onde a estimativa do modelo concorrente foi superior (e melhor) que a do modelo BS, pontos abaixo da linha diagonal indicam que a estimativa do BS foi maior que a do modelo concorrente. Portanto, para essa região do gráfico, quanto mais pontos verdes no triângulo A melhor para o modelo concorrente e quanto mais pontos verdes abaixo da linha diagonal melhor para o BS. O inverso ocorre para os pontos vermelhos dessa região do gráfico, porque são pontos que não foram exercidos e os modelos estão atribuindo probabilidades altas de serem exercidos (o que seria um grande erro).

Agora, para a parte esquerda do gráfico, onde o delta BS é inferior a 0,5, a região delimitada pelo triângulo B indica onde a estimativa do modelo concorrente foi inferior (e melhor) que a do modelo BS, pontos acima da linha diagonal indicam que a estimativa do BS foi maior que a do modelo concorrente. Portanto, para essa região do gráfico, quanto mais pontos vermelhos no triângulo B melhor para o modelo concorrente e quanto mais pontos vermelhos acima da linha diagonal melhor para o BS. Novamente, o inverso ocorre para os pontos verdes dessa região do gráfico, porque são pontos que foram exercidos e os modelos estão atribuindo probabilidades baixas de serem exercidos.

As Figuras 3.5 e 3.6 apresentam o gráfico de dispersão dos deltas para as opções da Petrobras. Os gráficos da Vale são apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8.

Para a Petrobras, para as 3 equações os resultados acompanham muito a linha diagonal indicando muita proximidade das estimativas de probabilidade. Contudo, mesmo estando próximo da linha diagonal, a maioria dos pontos está ligeiramente inferior a ela em todo o

**Figura 3.4:** *Exemplo Interpretação Dispersão.*



espaço  $(0,1)$ , ou seja, foi inserido um viés na estimativa de forma que para os pontos verdes o BS foi majoritariamente melhor mas para os vermelhos as 3 equações foram melhores, mesmo que por uma diferença pequena (estão muito próximos da linha de igualdade de estimativas). Observando os modelos GARCH e EGARCH, eles possuem um comportamento mais aderente a linha de igualdade, apenas o EGARCH com distribuição T usando Monte Carlo que parece ter mais opções não exercidas abaixo da linha e as exercidas acima, mas também não por uma diferença tão grande. O modelo LSTM se concentra muito também na linha de equivalência com o Black and Scholes, com uma leve tendência dos pontos vermelhos estarem melhores estimados. O modelo que conseguiu espalhar mais os pontos e ter distâncias maiores da linha de igualdade foi o modelo HNGARCH. Dos pontos que foram exercidos existe um indício de aglomeração acima da reta e com alguns pontos já bem próximos de 1 na estimativa do HNGARCH enquanto que no BS ainda estavam estimados como 0,8 a 0,9. A superioridade do HNGARCH parece ser mais contundente nos pontos que não foram exercidos, existe uma grande massa de pontos bem abaixo da reta e,

em alguns pontos, o HNGARCH já estimava como 0 (ou quase) o BS ainda atribuía uma probabilidade de 0,25.

Considerando as opções da Vale, as conclusões sobre as equações e modelos GARCH são as mesmas, com destaque para o EGARCH T sim e, principalmente, HNGARCH. Entretanto, para o modelo LSTM ocorreu um maior descolamento da região de igualdade para áreas favoráveis aos resultados do BS, tanto para os pontos vermelhos quanto verdes. Mas o principal fator que se chama atenção em todos os gráficos da Vale são os pontos verdes e vermelhos na faixa entre 0,3 e 0,4 do modelo Black and Scholes e que se espalham por uma grande amplitude de todos os modelos concorrentes. Esses pontos são referentes as opções próximas da data do desastre de Brumadinho, no qual as ações de Vale tiveram uma forte queda, ficando com alta volatilidade por esse período. Alguns modelos possuem essa nuvem de pontos mais agrupada, no caso apenas as 3 equações e o HNGARCH conseguiram absorver essa grande variação e não ser tão impactados.

Figura 3.5: Comparação Petr. Probabilidade Exercício modelos  $1 \times BS$ .

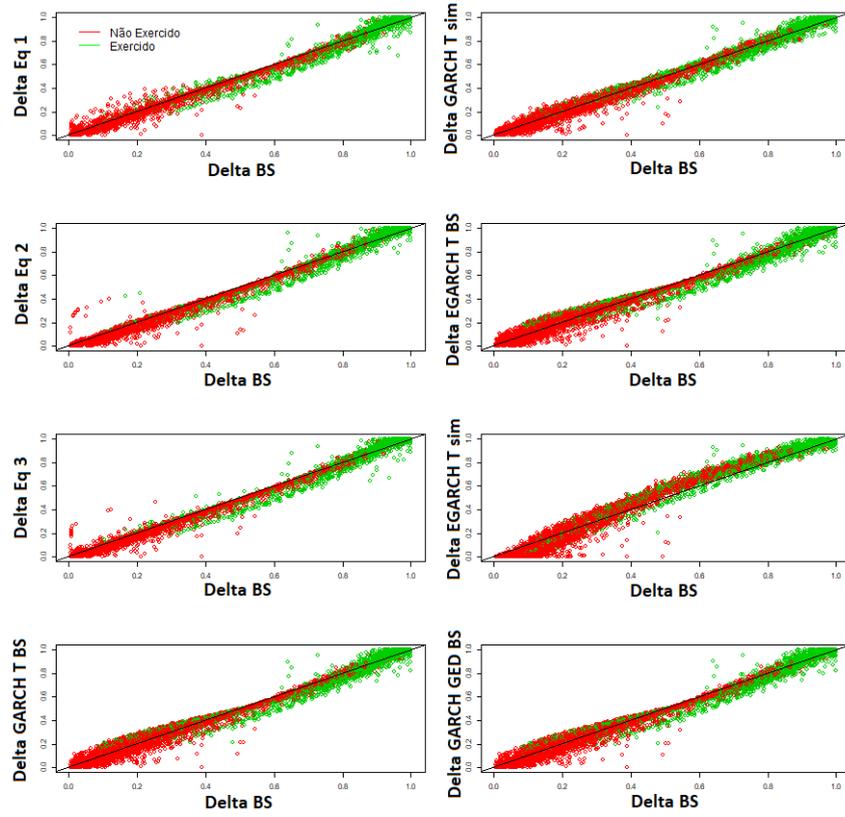


Figura 3.6: Comparação Petr. Probabilidade Exercício modelos  $2 \times BS$ .

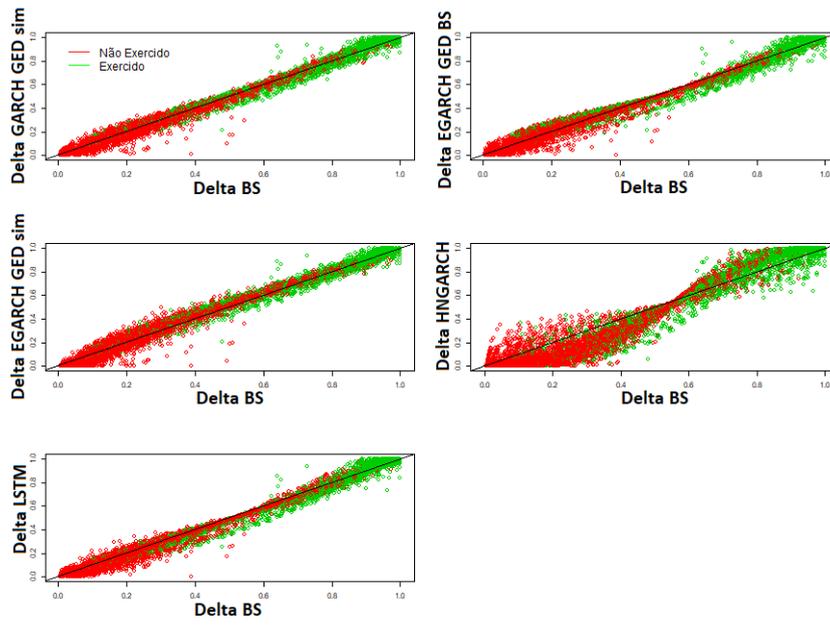


Figura 3.7: Comparação Vale. Probabilidade Exercício modelos  $1 \times BS$ .

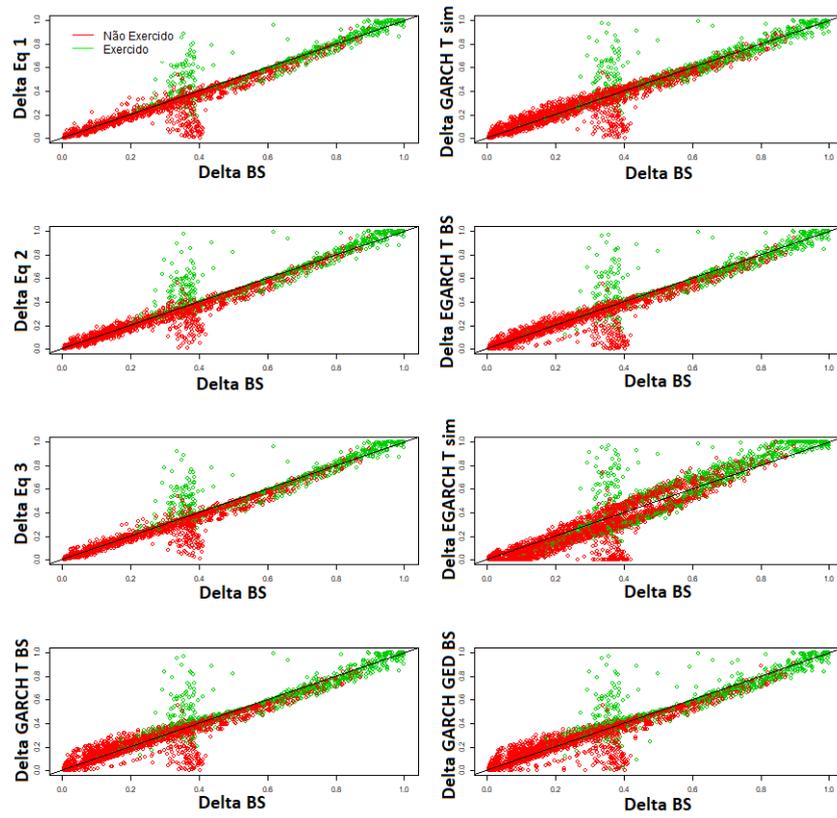
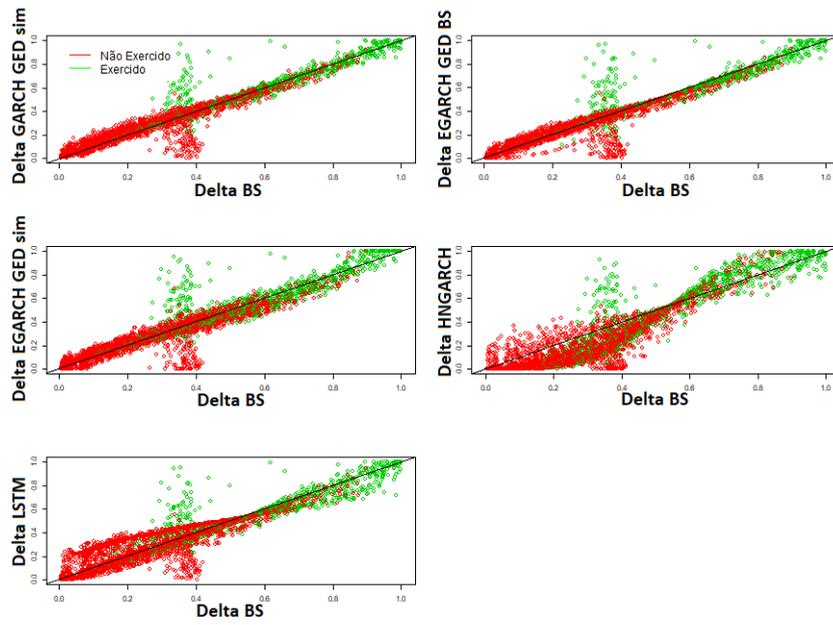


Figura 3.8: Comparação Vale. Probabilidade Exercício modelos  $2 \times BS$ .



### 3.3.1 Opções Exercidas

Esta subseção traz a análise que foi feita graficamente, mas distribuída por cenários e em tabelas com proporções para verificar onde de fato cada modelo se destacou e evitar a enorme quantidade de pontos que se sobrepõem nos gráficos já discutidos e evitar falsas conclusões.

As tabelas das opções que foram exercidas foram construídas com base nos gráficos de dispersão. A coluna "percentual acima" diz respeito a quantidade de opções com delta superior a 0,5 que foram exercidas (pontos verdes) que estão dentro do triângulo A da Figura 3.4 sobre a quantidade total de opções com delta superior a 0,5 que foram exercidas (soma das que estão acima e abaixo da linha e com delta maior que 0,5).

Para todas as opções que foram exercidas (Tabela 3.3), o modelo que teve o maior percentual de observações acima da linha de equivalência foi o EGARCH T sim com 85% para a Petr. e 63% para a Vale. Para o filtro temporal (Tabela 3.4), daquelas que estavam mais próximas do vencimento, o modelo EGARCH T sim foi melhor para ambas empresas. Para prazos maiores esse mesmo modelo foi o melhor para a Petr. mas para a Vale o HNGARCH foi melhor.

Considerando os cenários de moneyness (Tabela 3.5), como estamos analisando as opções com delta superior a 0,5 e que foram exercidas, não temos opções OTM para serem avaliadas pela forma que foi construído a categorização (OTM apenas se delta inferior a 0,35).

Portanto, quando as opções foram classificadas como ATM e ITM nas duas empresas o modelo EGARCH T sim foi bem superior, sendo o único que teve resultados superiores

ao Black and Scholes (os demais modelos tiveram proporção inferior a 0,5). Contudo, para a Vale no cenário ATM foi a única situação em que todos modelos, inclusive o EGARCH T sim (41%), foram conjuntamente inferiores ao Black and Scholes.

Novamente, considerando os 2 diferentes cenários de volatilidade (Tabela 3.6), o modelo EGARCH T sim foi melhor para as duas ações com proporções bem altas quando se possui volatilidade alta. Vale ressaltar que para a volatilidade alta outros modelos GARCH e HNGARCH também tiveram ótimo resultado, mas para volatilidade baixa foi o único que se distanciou bem do Black and Scholes.

Dessa forma, o EGARCH T sim foi o modelo com maior destaque porque conseguiu capturar os efeitos em diversos cenários. O resultado inferior das 3 equações foi devido a uma subestimação da probabilidade de exercício em todos os valores, esse resultado confirma o que graficamente tinha sido notado, um aglomerado de pontos (exercidos ou não) ligeiramente abaixo da linha de equivalência com o BS.

Tabela 3.3: Delta Todas opções Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Acima	Abaixo	Acima	Perc. Acima
Sem filtro	Eq 1	1378	481	0,26	459	168	0,27
	Eq 2	1241	618	0,33	434	193	0,31
	Eq 3	1294	565	0,3	448	179	0,29
	GARCH T BS	1431	428	0,23	526	101	0,16
	GARCH T sim	919	940	0,51	388	239	0,38
	EGARCH T BS	1445	414	0,22	503	124	0,2
	EGARCH T sim	<b>271</b>	<b>1588</b>	<b>0,85</b>	<b>231</b>	<b>396</b>	<b>0,63</b>
	GARCH GED BS	1380	479	0,26	523	104	0,17
	GARCH GED sim	916	943	0,51	406	221	0,35
	EGARCH GED BS	1399	460	0,25	519	108	0,17
	EGARCH GED sim	639	1220	0,66	399	228	0,36
	HNGARCH	762	1097	0,59	281	346	0,55
	LSTM	1397	462	0,25	485	142	0,23

Tabela 3.4: Delta Filtro Temporal opções Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Acima	Abaixo	Acima	Perc. Acima
Menos de 15 dias	Eq 1	530	380	0,42	331	162	0,33
	Eq 2	450	460	0,51	310	183	0,37
	Eq 3	481	429	0,47	321	172	0,35
	GARCH T BS	561	349	0,38	396	97	0,2
	GARCH T sim	346	564	0,62	282	211	0,43
	EGARCH T BS	568	342	0,38	370	123	0,25
	EGARCH T sim	<b>87</b>	<b>823</b>	<b>0,9</b>	<b>152</b>	<b>341</b>	<b>0,69</b>
	GARCH GED BS	534	376	0,41	393	100	0,2
	GARCH GED sim	360	550	0,6	297	196	0,4
	EGARCH GED BS	537	373	0,41	386	107	0,22
	EGARCH GED sim	271	639	0,7	290	203	0,41
	HNGARCH	446	464	0,51	219	274	0,56
LSTM	527	383	0,42	363	130	0,26	
Mais de 15 dias	Eq 1	848	101	0,11	128	6	0,04
	Eq 2	791	158	0,17	124	10	0,07
	Eq 3	813	136	0,14	127	7	0,05
	GARCH T BS	870	79	0,08	130	4	0,03
	GARCH T sim	573	376	0,4	106	28	0,21
	EGARCH T BS	877	72	0,08	133	1	0,01
	EGARCH T sim	<b>184</b>	<b>765</b>	<b>0,81</b>	79	55	0,41
	GARCH GED BS	846	103	0,11	130	4	0,03
	GARCH GED sim	556	393	0,41	109	25	0,19
	EGARCH GED BS	862	87	0,09	133	1	0,01
	EGARCH GED sim	368	581	0,61	109	25	0,19
	HNGARCH	316	633	0,67	<b>62</b>	<b>72</b>	<b>0,54</b>
LSTM	870	79	0,08	122	12	0,09	

Tabela 3.5: Delta Filtro Moneyness opções Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Acima	Abaixo	Acima	Perc. Acima
ITM	Eq 1	788	477	0,38	186	165	0,47
	Eq 2	654	611	0,48	161	190	0,54
	Eq 3	706	559	0,44	175	176	0,5
	GARCH T BS	841	424	0,34	257	94	0,27
	GARCH T sim	536	729	0,58	199	152	0,43
	EGARCH T BS	855	410	0,32	235	116	0,33
	EGARCH T sim	<b>228</b>	<b>1037</b>	<b>0,82</b>	<b>68</b>	<b>283</b>	<b>0,81</b>
	GARCH GED BS	791	474	0,37	258	93	0,26
	GARCH GED sim	530	735	0,58	214	137	0,39
	EGARCH GED BS	810	455	0,36	248	103	0,29
	EGARCH GED sim	522	743	0,59	186	165	0,47
	HNGARCH	345	920	0,73	119	232	0,66
	LSTM	812	453	0,36	238	113	0,32
ATM	Eq 1	590	4	0,01	273	3	0,01
	Eq 2	587	7	0,01	273	3	0,01
	Eq 3	588	6	0,01	273	3	0,01
	GARCH T BS	590	4	0,01	269	7	0,03
	GARCH T sim	383	211	0,36	189	87	0,32
	EGARCH T BS	590	4	0,01	268	8	0,03
	EGARCH T sim	<b>43</b>	<b>551</b>	<b>0,93</b>	<b>163</b>	<b>113</b>	<b>0,41</b>
	GARCH GED BS	589	5	0,01	265	11	0,04
	GARCH GED sim	386	208	0,35	192	84	0,3
	EGARCH GED BS	589	5	0,01	271	5	0,02
	EGARCH GED sim	117	477	0,8	213	63	0,23
	HNGARCH	417	177	0,3	162	114	0,41
	LSTM	585	9	0,02	247	29	0,11

Tabela 3.6: Delta Filtro Volatilidade opções Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Acima	Abaixo	Acima	Perc. Acima
Vol. Alta	Eq 1	343	384	0,53	142	118	0,45
	Eq 2	297	430	0,59	142	118	0,45
	Eq 3	302	425	0,58	142	118	0,45
	GARCH T BS	322	405	0,56	162	98	0,38
	GARCH T sim	136	591	0,81	113	147	0,57
	EGARCH T BS	349	378	0,52	145	115	0,44
	EGARCH T sim	<b>61</b>	<b>666</b>	<b>0,92</b>	<b>71</b>	<b>189</b>	<b>0,73</b>
	GARCH GED BS	294	433	0,6	166	94	0,36
	GARCH GED sim	130	597	0,82	114	146	0,56
	EGARCH GED BS	315	412	0,57	157	103	0,4
	EGARCH GED sim	141	586	0,81	110	150	0,58
	HNGARCH	142	585	0,8	88	172	0,66
	LSTM	323	404	0,56	159	101	0,39
Vol. Baixa	Eq 1	1035	97	0,09	317	50	0,14
	Eq 2	944	188	0,17	292	75	0,2
	Eq 3	992	140	0,12	306	61	0,17
	GARCH T BS	1109	23	0,02	364	3	0,01
	GARCH T sim	783	349	0,31	275	92	0,25
	EGARCH T BS	1096	36	0,03	358	9	0,02
	EGARCH T sim	<b>210</b>	<b>922</b>	<b>0,81</b>	<b>160</b>	<b>207</b>	<b>0,56</b>
	GARCH GED BS	1086	46	0,04	357	10	0,03
	GARCH GED sim	786	346	0,31	292	75	0,2
	EGARCH GED BS	1084	48	0,04	362	5	0,01
	EGARCH GED sim	498	634	0,56	289	78	0,21
	HNGARCH	620	512	0,45	193	174	0,47
	LSTM	1074	58	0,05	326	41	0,11

### 3.3.2 Opções Não Exercidas

Para as tabelas das opções que não foram exercidas também foi construída com base nos gráficos de dispersão. A coluna percentual abaixo diz respeito a quantidade de opções com delta inferior a 0,5 que não foram exercidas (pontos vermelhos) que estão dentro do triângulo B da imagem 3.4 sobre a quantidade total de quantidade de opções com delta inferior a 0,5 que não foram exercidas (soma das que estão acima e abaixo da linha e delta menor que 0,5).

Para todas as opções que não foram exercidas (Tabela 3.7), o modelo que teve o maior percentual foi o HNGARCH para a Vale (87%) e para a Petr. as equações 2 e 3 com 91% (o modelo HNGARCH também teve um ótimo desempenho, 87%). Para o filtro temporal (Tabela 3.8), daquelas que estavam com menos de 15 dias do vencimento, a equação 2 teve a maior proporção na Petr. e a equação 1 na Vale, mas nas duas empresas o modelo HNGARCH e EGARCH T sim tiveram resultados equivalentes e também se destacaram. Para o período com mais tempo até a maturidade a equação 3 se destacou na Petr. e o HNGARCH na Vale.

Considerando os cenários de moneyness (Tabela 3.9), temos o equivalente a subseção 5.2.1 mas para opções OTM, ou seja, como estamos analisando as opções com delta inferior a 0,5 e que não foram exercidas, não temos opções ITM para serem avaliadas pela forma que foi construído a categorização (ITM apenas se delta superior a 0,75).

Portanto, quando as opções foram classificadas como ATM nas duas empresas as equações 2, 3 foram as melhores com o HNGARCH e LSTM próximos. Para as opções OTM da Vale o modelo que teve maior proporção foi o HNGARCH e na Petr. as equações 2, 3,

com o HNGARCH apenas com 4% a menos.

No filtro de volatilidade (Tabela 3.10), para a Petr. quando comparada em cenários de volatilidade alta, mais uma vez a equação 2 teve a maior proporção na Petr. mas o modelo HNGARCH e EGARCH T sim tiveram resultados equivalentes e também se destacaram. Ainda considerando a Petr., para volatilidade baixa as equações 2 e 3 tiveram empate com o melhor resultado e apenas o HNGARCH conseguiu resultados equiparáveis. Para a Vale tanto no cenário de volatilidade alta quanto baixo o HNGARCH foi o melhor, mas na alta o modelo EGARCH T sim também teve o mesmo desempenho e os demais modelos GARCHS não tiveram resultados expressivos.

Dessa forma, as 3 equações, EGARCH T sim e HNGARCH foram os modelos que se destacaram, mas o que teve melhor desempenho em mais cenários ainda assim foi o HNGARCH. O resultado das 3 equações já eram esperados de serem o complementar do discutido na subseção anterior devido a uma subestimação da probabilidade de exercício em todos os valores (graficamente avaliado também). O modelo HNGARCH também obteve um resultado destacado por estimar mais aos extremos, principalmente para as opções que não foram exercidas, a probabilidade de exercício.

Tabela 3.7: Delta Todas opções Não Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Abaixo	Abaixo	Acima	Perc. Abaixo
Sem filtro	Eq 1	512	2612	0,84	322	1689	0,84
	Eq 2	<b>296</b>	<b>2828</b>	<b>0,91</b>	472	1539	0,77
	Eq 3	<b>293</b>	<b>2831</b>	<b>0,91</b>	391	1620	0,81
	GARCH T BS	1291	1833	0,59	942	1069	0,53
	GARCH T sim	1431	1693	0,54	1129	882	0,44
	EGARCH T BS	1496	1628	0,52	984	1027	0,51
	EGARCH T sim	1296	1828	0,59	508	1503	0,75
	GARCH GED BS	1155	1969	0,63	1029	982	0,49
	GARCH GED sim	1396	1728	0,55	1278	733	0,36
	EGARCH GED BS	1350	1774	0,57	1114	897	0,45
	EGARCH GED sim	1717	1407	0,45	1094	917	0,46
	HNGARCH	411	2713	0,87	<b>256</b>	<b>1755</b>	<b>0,87</b>
	LSTM	1187	1937	0,62	797	1214	0,6

Tabela 3.8: Delta Filtro Tempo opções Não Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Abaixo	Abaixo	Acima	Perc. Abaixo
Menos de 15 dias	Eq 1	308	1174	0,79	<b>216</b>	<b>1056</b>	<b>0,83</b>
	Eq 2	<b>145</b>	<b>1337</b>	<b>0,9</b>	347	925	0,73
	Eq 3	172	1310	0,88	281	991	0,78
	GARCH T BS	631	851	0,57	572	700	0,55
	GARCH T sim	548	934	0,63	614	658	0,52
	EGARCH T BS	702	780	0,53	599	673	0,53
	EGARCH T sim	414	1068	0,72	263	1009	0,79
	GARCH GED BS	573	909	0,61	617	655	0,51
	GARCH GED sim	550	932	0,63	722	550	0,43
	EGARCH GED BS	644	838	0,57	692	580	0,46
	EGARCH GED sim	667	815	0,55	587	685	0,54
	HNGARCH	411	1071	0,72	255	1017	0,8
LSTM	588	894	0,6	465	807	0,63	
Mais de 15 dias	Eq 1	204	1438	0,88	106	633	0,86
	Eq 2	151	1491	0,91	125	614	0,83
	Eq 3	<b>121</b>	<b>1521</b>	<b>0,93</b>	110	629	0,85
	GARCH T BS	660	982	0,6	370	369	0,5
	GARCH T sim	883	759	0,46	515	224	0,3
	EGARCH T BS	794	848	0,52	385	354	0,48
	EGARCH T sim	882	760	0,46	245	494	0,67
	GARCH GED BS	582	1060	0,65	412	327	0,44
	GARCH GED sim	846	796	0,48	556	183	0,25
	EGARCH GED BS	706	936	0,57	422	317	0,43
	EGARCH GED sim	1050	592	0,36	507	232	0,31
	HNGARCH	1642	1642	0,5	<b>1</b>	<b>738</b>	<b>1</b>
LSTM	599	1043	0,64	332	407	0,55	

Tabela 3.9: Delta Filtro Moneyness opções Não Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Abaixo	Abaixo	Acima	Perc. Abaixo
ATM	Eq 1	26	520	0,95	27	491	0,95
	Eq 2	<b>8</b>	<b>538</b>	<b>0,99</b>	<b>17</b>	<b>501</b>	<b>0,97</b>
	Eq 3	<b>5</b>	<b>541</b>	<b>0,99</b>	20	498	0,96
	GARCH T BS	162	384	0,7	<b>94</b>	424	0,82
	GARCH T sim	253	293	0,54	229	289	0,56
	EGARCH T BS	182	364	0,67	97	421	0,81
	EGARCH T sim	493	53	0,1	187	331	0,64
	GARCH GED BS	140	406	0,74	117	401	0,77
	GARCH GED sim	239	307	0,56	253	265	0,51
	EGARCH GED BS	151	395	0,72	134	384	0,74
	EGARCH GED sim	467	79	0,14	156	362	0,7
	HNGARCH	37	509	0,93	41	477	0,92
LSTM	71	475	0,87	132	386	0,75	
OTM	Eq 1	486	2092	0,81	295	1198	0,8
	Eq 2	<b>288</b>	<b>2290</b>	<b>0,89</b>	455	1038	0,7
	Eq 3	<b>288</b>	<b>2290</b>	<b>0,89</b>	371	1122	0,75
	GARCH T BS	1129	1449	0,56	848	645	0,43
	GARCH T sim	1178	1400	0,54	900	593	0,4
	EGARCH T BS	1314	1264	0,49	887	606	0,41
	EGARCH T sim	803	1775	0,69	321	1172	0,78
	GARCH GED BS	1015	1563	0,61	912	581	0,39
	GARCH GED sim	1157	1421	0,55	1025	468	0,31
	EGARCH GED BS	1199	1379	0,53	980	513	0,34
	EGARCH GED sim	1250	1328	0,52	938	555	0,37
	HNGARCH	374	2204	0,85	<b>215</b>	<b>1278</b>	<b>0,86</b>
LSTM	1116	1462	0,57	665	828	0,55	

Tabela 3.10: Delta Filtro Volatilidade opções Não Exercidas.

Filtro	Modelos	Petrobras			Vale		
		Abaixo	Acima	Perc. Abaixo	Abaixo	Acima	Perc. Abaixo
Vol. Alta	Eq 1	261	958	0,79	85	421	0,83
	Eq 2	<b>103</b>	<b>1116</b>	<b>0,92</b>	234	272	0,54
	Eq 3	108	1111	0,91	167	339	0,67
	GARCH T BS	231	988	0,81	181	325	0,64
	GARCH T sim	142	1077	0,88	214	292	0,58
	EGARCH T BS	323	896	0,74	119	387	0,76
	EGARCH T sim	179	1040	0,85	<b>72</b>	<b>434</b>	<b>0,86</b>
	GARCH GED BS	211	1008	0,83	185	321	0,63
	GARCH GED sim	143	1076	0,88	244	262	0,52
	EGARCH GED BS	275	944	0,77	172	334	0,66
	EGARCH GED sim	247	972	0,8	183	323	0,64
	HNGARCH	122	1097	0,9	<b>72</b>	<b>434</b>	<b>0,86</b>
	LSTM	319	900	0,74	178	328	0,65
Vol. Baixa	Eq 1	251	1654	0,87	237	1268	0,84
	Eq 2	<b>193</b>	<b>1712</b>	<b>0,9</b>	238	1267	0,84
	Eq 3	<b>185</b>	<b>1720</b>	<b>0,9</b>	224	1281	0,85
	GARCH T BS	1060	845	0,44	761	744	0,49
	GARCH T sim	1289	616	0,32	915	590	0,39
	EGARCH T BS	1173	732	0,38	865	640	0,43
	EGARCH T sim	1117	788	0,41	436	1069	0,71
	GARCH GED BS	944	961	0,5	844	661	0,44
	GARCH GED sim	1253	652	0,34	1034	471	0,31
	EGARCH GED BS	1075	830	0,44	942	563	0,37
	EGARCH GED sim	1470	435	0,23	911	594	0,39
	HNGARCH	289	1616	0,85	<b>184</b>	<b>1321</b>	<b>0,88</b>
	LSTM	868	1037	0,54	619	886	0,59

### 3.4 Valor opção de Compra (call)

O cálculo do valor de compra é o objetivo de interesse de muitos investidores e pesquisadores para tentar explorar alguma ineficiência de precificação do mercado e ter alguma vantagem competitiva.

Foram geradas as tabelas com os erros de cada modelo considerando as métricas MSE, RMSE, MAE e MAPE, comparando o valor praticado pelo mercado e o previsto pelo modelo, e para cada cenário foi deixado em negrito o modelo que obteve o menor erro, tanto para a Petrobras quanto para a Vale.

Para o cenário sem filtro (Tabela 3.11), as 4 métricas indicam que a Equação 1 possui o menor erro para a Petrobras (Petr.) e para a Vale, para o MSE e RMSE existe um empate entre a primeira equação e o LSTM, mas para o MAE e MAPE a primeira equação é melhor.

Considerando a variável de tempo (Tabela 3.12), para opções com menos de 15 dias para o vencimento, as equações 1 e 2 tiveram os melhores resultados para a Petr. e apenas a equação 1 para a Vale. Considerando as opções com tempo de maturidade maior, a equação 1 novamente e o LSTM que obtêm as melhores métricas para a Petr. enquanto que para a Vale a equação 1 compartilha os melhores resultados com o modelo EGARCH T BS.

Já para os cenários com diferentes moneyness (Tabela 3.13), tanto nas opções ATM e OTM as equações 1 e 3 foram superiores que todas as demais para as duas companhias. Contudo, para as que estão ITM, ou seja, o valor do strike está bem mais baixo do que o preço do mercado, o modelo GARCH T BS teve o melhor desempenho nas 4 medidas, com empate na MSE com o modelo EGARCH T BS na Petr. Os resultados do GARCH T BS

também se destacaram na Vale, apenas no RMSE que o melhor foi EGARCH GED BS.

No último filtro, da volatilidade (Tabela 3.14), os resultados novamente indicaram para uma superioridade das equações 1 e 3 em ambas empresas, tanto para a volatilidade alta quanto baixa. As exceções foram considerando a volatilidade baixa na Vale que para o MSE e RMSE o modelo EGARCH T BS.

De forma geral, os resultados das equações tem a grande superioridade pela forma que naturalmente são construídas, tem a vantagem de consultar o preço da call e da vol para ser calculado. Outro fato que chama atenção é o modelo GARCH T BS ter o menor erro em diversos cenários e se igualando as equações em outros.

O modelo LSTM não teve o menor erro na maioria dos casos, contudo possui um erro levemente superior a da equação 1 em quase todos os cenários. Isso mostra que a rede neural conseguiu capturar bem o movimento do Black and Scholes, assim como os resultados da referência [12] apontam.

Um fato negativo é que o modelo HNGARCH não conseguiu o mesmo desempenho que nas seções anteriores, as suas métricas de erro usualmente eram as maiores de todos os modelos em quase todas as tabelas. A explicação para essa mal precificação da call é que exatamente por calcular a probabilidade de exercício mais próximas de 0 ou de 1 do que os demais modelos, é natural que esteja a subprecificar a call em situações com alta probabilidade de exercício e a sobreprecificar a call em situações com baixa probabilidade de exercício. Assim, dado que o erro é medido pelas diferenças do que o modelo propôs e o que o mercado pratica (algo mais próximo do BS), existe uma tendência de se ter erros maiores nas métricas que o comparam com o mercado.

Tabela 3.11: Call Todas opções.

Filtro	Modelos	Petrobras				Vale			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Sem filtro	Eq1	<b>0,021</b>	<b>0,144</b>	<b>0,066</b>	<b>0,171</b>	<b>0,024</b>	<b>0,155</b>	<b>0,088</b>	<b>0,137</b>
	Eq2	0,025	0,158	0,074	0,221	0,041	0,202	0,110	0,185
	Eq3	0,025	0,158	0,070	0,207	0,030	0,173	0,096	0,151
	GARCH T BS	0,030	0,172	0,099	0,279	0,050	0,225	0,145	0,310
	GARCH T sim	0,053	0,230	0,150	0,343	0,137	0,370	0,248	0,429
	EGARCH T BS	0,031	0,176	0,104	0,292	0,028	0,168	0,119	0,234
	EGARCH T sim	0,041	0,203	0,128	0,325	0,448	0,669	0,250	0,586
	GARCH GED BS	0,030	0,172	0,099	0,272	0,060	0,244	0,158	0,341
	GARCH GED sim	0,048	0,218	0,139	0,317	0,160	0,399	0,270	0,468
	EGARCH GED BS	0,030	0,172	0,101	0,279	0,036	0,190	0,140	0,280
	EGARCH GED sim	0,053	0,229	0,150	0,330	0,142	0,377	0,283	0,603
	HNGARCH	0,139	0,373	0,278	0,634	0,349	0,591	0,471	0,766
	LSTM	0,024	0,155	0,089	0,222	0,355	0,596	0,365	0,772

Tabela 3.12: Call Filtro Temporal.

Filtro	Modelos	Petrobras				Vale			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Menos de 15 dias	Eq1	<b>0,023</b>	<b>0,153</b>	0,047	0,201	<b>0,009</b>	<b>0,093</b>	<b>0,057</b>	<b>0,133</b>
	Eq2	0,026	0,161	<b>0,046</b>	<b>0,171</b>	0,022	0,147	0,079	0,172
	Eq3	0,024	0,155	0,048	0,268	0,010	0,100	0,062	0,138
	GARCH T BS	0,030	0,173	0,076	0,297	0,031	0,176	0,116	0,316
	GARCH T sim	0,030	0,172	0,078	0,294	0,045	0,212	0,150	0,385
	EGARCH T BS	0,030	0,174	0,076	0,305	0,023	0,153	0,103	0,247
	EGARCH T sim	0,032	0,178	0,083	0,372	0,439	0,663	0,195	0,601
	GARCH GED BS	0,030	0,173	0,075	0,288	0,038	0,195	0,126	0,345
	GARCH GED sim	0,029	0,170	0,073	0,278	0,051	0,226	0,164	0,423
	EGARCH GED BS	0,030	0,173	0,074	0,289	0,025	0,157	0,112	0,281
	EGARCH GED sim	0,031	0,176	0,081	0,304	0,050	0,224	0,175	0,590
	HNGARCH	0,053	0,229	0,140	0,643	0,158	0,398	0,312	0,768
LSTM	0,030	0,172	0,076	0,274	0,193	0,440	0,277	0,785	
Mais de 15 dias	Eq1	<b>0,019</b>	<b>0,136</b>	<b>0,083</b>	<b>0,145</b>	0,051	0,227	<b>0,143</b>	<b>0,142</b>
	Eq2	0,024	0,155	0,098	0,264	0,075	0,274	0,166	0,206
	Eq3	0,026	0,161	0,089	0,154	0,065	0,255	0,158	0,175
	GARCH T BS	0,029	0,171	0,120	0,263	0,085	0,291	0,198	0,300
	GARCH T sim	0,073	0,270	0,212	0,385	0,300	0,548	0,423	0,507
	EGARCH T BS	0,031	0,177	0,128	0,281	<b>0,037</b>	<b>0,192</b>	0,148	0,211
	EGARCH T sim	0,049	0,222	0,168	0,284	0,463	0,680	0,348	0,560
	GARCH GED BS	0,029	0,171	0,120	0,258	0,099	0,314	0,216	0,333
	GARCH GED sim	0,064	0,252	0,195	0,352	0,353	0,594	0,459	0,550
	EGARCH GED BS	0,029	0,171	0,124	0,271	0,056	0,236	0,189	0,277
	EGARCH GED sim	0,071	0,267	0,210	0,353	0,306	0,553	0,475	0,626
	HNGARCH	0,213	0,461	0,397	0,626	0,688	0,829	0,753	0,762
LSTM	0,019	0,138	0,100	0,177	0,642	0,801	0,522	0,749	

**Tabela 3.13:** *Call Filtro Moneyness.*

Filtro	Modelos	Petrobras				Vale			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
ITM	Eq1	0,024	0,154	0,102	0,050	0,039	0,197	0,147	0,050
	Eq2	0,026	0,162	0,114	0,055	0,039	0,198	0,155	0,053
	Eq3	0,031	0,175	0,112	0,054	0,040	0,201	0,153	0,052
	GARCH T BS	<b>0,023</b>	<b>0,152</b>	<b>0,095</b>	<b>0,047</b>	0,034	0,183	0,127	0,051
	GARCH T sim	0,055	0,234	0,160	0,081	0,116	0,341	0,240	0,095
	EGARCH T BS	<b>0,023</b>	0,153	0,096	0,048	<b>0,032</b>	0,179	<b>0,120</b>	<b>0,044</b>
	EGARCH T sim	0,055	0,234	0,164	0,080	0,060	0,245	0,177	0,068
	GARCH GED BS	0,025	0,158	0,101	0,050	0,034	0,184	0,126	0,051
	GARCH GED sim	0,049	0,221	0,148	0,074	0,140	0,373	0,260	0,102
	EGARCH GED BS	0,024	0,156	0,100	0,050	0,031	<b>0,177</b>	0,123	0,046
	EGARCH GED sim	0,063	0,250	0,182	0,094	0,103	0,321	0,218	0,084
	HNGARCH	0,111	0,334	0,256	0,143	0,274	0,524	0,389	0,152
LSTM	0,026	0,160	0,107	0,053	0,241	0,491	0,329	0,132	
ATM	Eq1	<b>0,039</b>	<b>0,198</b>	<b>0,080</b>	<b>0,083</b>	<b>0,037</b>	<b>0,192</b>	<b>0,121</b>	<b>0,104</b>
	Eq2	0,040	0,200	0,086	<b>0,083</b>	0,050	0,223	0,138	0,160
	Eq3	0,046	0,214	0,084	<b>0,083</b>	0,040	0,200	0,124	0,116
	GARCH T BS	0,055	0,234	0,130	0,149	0,066	0,257	0,176	0,157
	GARCH T sim	0,095	0,308	0,214	0,242	0,205	0,453	0,317	0,249
	EGARCH T BS	0,057	0,239	0,138	0,162	0,039	0,198	0,147	0,143
	EGARCH T sim	0,068	0,261	0,158	0,171	0,805	0,897	0,290	0,249
	GARCH GED BS	0,055	0,233	0,128	0,144	0,080	0,282	0,192	0,171
	GARCH GED sim	0,087	0,295	0,199	0,225	0,234	0,484	0,341	0,267
	EGARCH GED BS	0,055	0,234	0,132	0,153	0,048	0,219	0,170	0,164
	EGARCH GED sim	0,094	0,307	0,212	0,237	0,197	0,444	0,342	0,298
	HNGARCH	0,282	0,531	0,446	0,493	0,610	0,781	0,685	0,555
LSTM	0,046	0,215	0,119	0,137	0,467	0,684	0,433	0,338	
OTM	Eq1	<b>0,006</b>	<b>0,078</b>	<b>0,036</b>	<b>0,301</b>	<b>0,010</b>	<b>0,101</b>	<b>0,047</b>	<b>0,185</b>
	Eq2	0,013	0,116	0,044	0,412	0,034	0,185	0,077	0,237
	Eq3	0,007	0,086	<b>0,036</b>	0,380	0,019	0,139	0,061	0,204
	GARCH T BS	0,015	0,124	0,081	0,500	0,042	0,206	0,126	0,496
	GARCH T sim	0,022	0,149	0,099	0,561	0,088	0,297	0,196	0,654
	EGARCH T BS	0,016	0,128	0,084	0,520	0,019	0,137	0,097	0,352
	EGARCH T sim	0,015	0,121	0,087	0,571	0,266	0,516	0,237	0,981
	GARCH GED BS	0,015	0,121	0,078	0,487	0,051	0,225	0,141	0,547
	GARCH GED sim	0,019	0,138	0,091	0,519	0,106	0,326	0,216	0,719
	EGARCH GED BS	0,015	0,121	0,080	0,497	0,028	0,166	0,120	0,430
	EGARCH GED sim	0,018	0,133	0,089	0,529	0,109	0,331	0,253	0,974
	HNGARCH	0,053	0,230	0,172	1,009	0,163	0,404	0,324	1,087
LSTM	0,007	0,086	0,059	0,377	0,295	0,544	0,320	1,274	

Tabela 3.14: Call Filtro Volatilidade.

Filtro	Modelos	Petrobras				Vale			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Vol. Alta	Eq1	<b>0,044</b>	<b>0,210</b>	<b>0,089</b>	0,249	<b>0,024</b>	<b>0,156</b>	<b>0,104</b>	<b>0,149</b>
	Eq2	0,054	0,231	0,097	0,381	0,067	0,258	0,150	0,199
	Eq3	0,056	0,236	0,095	0,336	0,032	0,179	0,113	0,164
	GARCH T BS	0,052	0,227	0,117	0,304	0,104	0,322	0,222	0,394
	GARCH T sim	0,047	0,218	0,097	<b>0,216</b>	0,095	0,308	0,206	0,401
	EGARCH T BS	0,049	0,220	0,107	0,274	0,048	0,220	0,147	0,212
	EGARCH T sim	0,059	0,243	0,134	0,415	0,715	0,845	0,258	0,523
	GARCH GED BS	0,055	0,233	0,125	0,323	0,115	0,338	0,229	0,427
	GARCH GED sim	0,046	0,214	0,093	0,230	0,108	0,328	0,218	0,425
	EGARCH GED BS	0,050	0,223	0,112	0,291	0,042	0,205	0,135	0,205
	EGARCH GED sim	0,052	0,227	0,110	0,322	0,029	0,170	0,129	0,332
	HNGARCH	0,185	0,430	0,293	0,625	0,386	0,622	0,483	0,633
LSTM	0,047	0,217	0,108	0,266	0,268	0,518	0,366	0,621	
Vol. Baixa	Eq1	<b>0,007</b>	<b>0,083</b>	<b>0,052</b>	<b>0,124</b>	0,024	0,155	<b>0,081</b>	<b>0,131</b>
	Eq2	0,008	0,088	0,061	0,126	0,029	0,171	0,092	0,178
	Eq3	<b>0,007</b>	<b>0,083</b>	0,055	0,130	0,029	0,170	0,089	0,146
	GARCH T BS	0,016	0,128	0,089	0,263	0,027	0,164	0,111	0,273
	GARCH T sim	0,056	0,237	0,182	0,419	0,155	0,394	0,267	0,441
	EGARCH T BS	0,020	0,142	0,102	0,302	<b>0,020</b>	<b>0,140</b>	0,107	0,243
	EGARCH T sim	0,031	0,175	0,125	0,271	0,329	0,574	0,246	0,614
	GARCH GED BS	0,015	0,122	0,084	0,242	0,036	0,189	0,127	0,303
	GARCH GED sim	0,049	0,220	0,166	0,370	0,183	0,427	0,293	0,488
	EGARCH GED BS	0,018	0,132	0,095	0,272	0,033	0,183	0,142	0,313
	EGARCH GED sim	0,053	0,231	0,174	0,336	0,192	0,438	0,351	0,723
	HNGARCH	0,111	0,333	0,269	0,639	0,332	0,576	0,465	0,825
LSTM	0,010	0,102	0,078	0,195	0,393	0,627	0,364	0,839	

# Capítulo 4

## Conclusões

### 4.1 Considerações Finais

O trabalho proposto teve como objetivo realizar a comparação dos modelos tradicionais e modernos para precificação de opções de compra e estimação da probabilidade de exercício. O estudo também mostra uma possibilidade pouco abordada na literatura científica de como se trabalhar com a volatilidade. O estudo foi realizado tendo como foco as duas principais ações do mercado brasileiro, Petrobras e Vale.

Esse trabalho inova na forma de reduzir a superfície de volatilidade e trabalhar unicamente com uma volatilidade por dia, além da criação das 3 equações para resumir a volatilidade implícita obtida do modelo Black and Scholes. Também foi explorado algumas formas de avaliação da probabilidade de exercício, o qual ainda foi pouco considerado na literatura.

Pelos resultados da estimação da probabilidade de exercício, os modelos que mais se destacaram para as opções que não foram exercidas são as 3 equações, EGARCH T sim e o HNGARCH. Para as que foram exercidas o EGARCH T sim se destacou frente a todos os outros modelos. Contudo, mesmo o modelo EGARCH T sim possuindo essas vantagens, a distância entre seus resultados e os do Black and Scholes não é tão grande

quantitativamente como os do HNGARCH.

Modelos GARCH e EGARCH que utilizam a fórmula do Black and Scholes para que a partir da volatilidade se encontre o Delta, não tiveram desempenho relevante para a probabilidade de exercício. O modelo LSTM também não se mostrou uma melhor alternativa, uma vez que foi construído para aproximar os resultados do BS (não teve destaque frente ao BS) mas conseguiu ser efetivo em se aproximar e ser um dos modelos com métricas de erro para call menores. Portanto, o modelo LSTM conseguiu desempenhar um bom resultado dentro do escopo da sua rede construída, possuindo resultados equivalentes ao artigo utilizado para replicar a rede [12].

Para o valor de compra das opções, os modelos que tiveram as menores métricas de erro foram a equação 1, EGARCH T BS, GARCH T BS e LSTM. A equação 1 obteve grandes resultados por ser uma simplificação do BS e ter a vantagem de se olhar para o preço da call de mercado para encontrar a volatilidade e vice versa. Dentre os modelos GARCH e EGARCH, ao contrário do que ocorreu no cálculo da probabilidade de exercício, os modelos que se basearam no BS para que a partir da sua volatilidade estimada usam a fórmula do BS tiveram boa performance exatamente por, mesmo com variâncias distintas, o uso da mesma fórmula aproxima os resultados e fazem com que se aproximem dos resultados do mercado. Com esses indícios, as opções das duas companhias parecem seguir bem o estipulado pela fórmula de Black and Scholes, pelo menos em alguns cenários.

## 4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Existem várias possibilidades de evoluir o conteúdo apresentado. Um outro estudo que pode ser realizado tem relação com a expansão da abordagem Bayesiana no LSTM utili-

zando as volatilidades previstas dos GARCHs como resposta, fazendo a rede se assemelhar mais com esses modelos. Outra possibilidade é adicionar variáveis regressoras nos modelos GARCHs, algo como foi feito no LSTM mas com variáveis de mercado e macroeconômicas. Uma forma de também de continuar o estudo seria o estudo das demais gregas com o mesmo objetivo, uma possibilidade seria o aprimoramento da estimação do theta (medida do quanto valoriza/desvaloriza a opção com a passagem de 1 dia), usando as ideias de monte carlo com GARCH como aqui já realizadas.

# Referências Bibliográficas

- [1] Fisher Myron Black e Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 83(3):637–654, 1973. 19
- [2] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(1):307–327, 1986. 35
- [3] BM&F Bovespa. Tipos de mercados derivativos. Technical report, BM&F Bovespa, 2011. 6
- [4] Pedro A. Moretin Clélia M. C. Toloí. *Análise de séries temporais*. ABE, 1º edition, 2006. 35
- [5] Ricardo Consonni. Modelagem de superfícies de volatilidade para opções com baixa liquidez sobre pares de moedas, cujos componentes apresentam opções líquidas em outros pares, 2017. 52
- [6] C. L. Costa. Opções: operando a volatilidade. Technical report, Bolsa de Mercadorias Futuros, 1998. 13
- [7] Lucas Vioto dos Santos Ribeiro. Modelos de precificação de opções americanas a partir de plataformas paralelas, 2017. 9
- [8] Jin-Chuan Duan. The garch option pricing model. *Mathematical finance*, 5(1):13–32, 1995. 2, 30
- [9] Bernard Dumas, Jeff Fleming, and Robert E. Whaley. Implied volatility functions: Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53:2059–2106, 1998. 2, 30
- [10] Anupam Dutta. Modelling volatility: Symmetric or asymmetric garch models? *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications*, 12:99–108, 2014. 38
- [11] R.F. Engle. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of u.k. inflation. *Econometrica*, 50(1):987–1008, 1982. 35
- [12] Chang Hyun Won Ha Young Kim. Forecasting the volatility of stock price index: A hybrid model integrating lstm with multiple garch-type models. *The journal of political economy*, 103:25—37, 2018. vii, 4, 46, 57, 85, 91
- [13] Steven L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6:327–343, 1993. 3
- [14] Steven L. Heston and Saikat Nandi. A closed-form garch option valuation model. *The Review of Financial Studies*, 13:585–625, 2000. 3, 31

- [15] Maurício (Bastter) Hissa. *Operando opções : guia avançado de operações com opções*. Elsevier, 1 edition, 2010. [11](#), [19](#), [20](#)
- [16] K. C. Hsieh and P. Ritchken. An empirical comparison of garch option pricing models. Technical report, Springer Science + Business Media, 2006. [3](#)
- [17] John C Hull. *Opções, futuros e outros derivativos*. Bookman, 9<sup>o</sup> edition, 2016. Tradução: Francisco Araújo da Costa ; revisão técnica: Guilherme Ribeiro de Macêdo. [2](#), [16](#), [18](#), [36](#)
- [18] Tomas Schweizer Hélio Santiago. Day trade no mercado de opções. Technical report, Capital e Valor, 2019. [12](#)
- [19] Ryan P. Adams Jasper Snoek, Hugo Larochelle. Practical bayesian optimization of machine learning algorithms. Technical report, University of Toronto, Universite de Sherbrooke and Harvard University, 2012. [45](#)
- [20] Emanuel Derman Iraj Kani. *The Volatility Smile and Its implied Tree*. Goldman, Sachs Co., 1 edition, 1994. [4](#)
- [21] Andrew W. LO. Statistical tests of contingente-claims asset-pricing models a new methodology. *Journal of Financial Economics*, 17:143–173, 1986. [4](#)
- [22] Par Mais. Derivativos financeiros - o que são? Technical report, Par Mais, 2018. [5](#)
- [23] J.T. Marlin. Portfolio hedging using index options. Technical report, Whotrades, 2015. [8](#)
- [24] Jurgen Schmidhuber Sepp Hochreiter. Long short-term memory. *Neural Computation*, 9:1735–1780, 1997. [40](#)
- [25] Stanford. Understanding lstm networks. Technical report, Stanford, 2015. [40](#)
- [26] Option Trading Tips. Explaining the "greeks". <https://www.optiontradingtips.com/greeks/>, 2019. Accessed: 2019-10-31. [vii](#), [13](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [26](#), [27](#)